

Неделя 20. Вычислимость-2

1. Найдите разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ и вычислимую всюду определённую функцию $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что образ $f(A)$ неразрешим.
2. Докажите, что не существует универсальной вычислимой функции для вычислимых всюду определённых функций, то есть такой всюду определённой вычислимой функции $U: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что для любой вычислимой всюду определённой функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ найдется такое p , что $U(p, x) = f(x)$ для всех x .
3. Пусть U — универсальная вычислимая функция. Докажите, что $U(p, p)$ не определено для некоторого p .
4. Пусть U — Геделева универсальная функция. Докажите, что множество

$$\{n \mid U_n(x) \text{ — нигде не определенная функция}\}$$

не перечислимо.

5. Докажите, что всякое перечислимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ является проекцией некоторого разрешимого множества $B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
6. Докажите, что функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ вычислима тогда и только тогда, когда ее график

$$\Gamma = \{(x, y) \mid f(x) \text{ определена и равна } y\}$$

перечислим.

7. Докажите, что существует вычислимая функция, принимающая только значения 0 и 1, и не имеющая всюду определенного вычислимого продолжения.
8. Докажите, что существуют два непересекающихся множества C и D , такие что не существует разделяющего их разрешимого множества, то есть такого разрешимого множества E , что $C \subseteq E$ и $D \cap E = \emptyset$.
9. Докажите, что существует перечислимое множество $P \subseteq \mathbb{N}$, такое что P пересекается с любым бесконечным перечислимым множеством в \mathbb{N} , и при этом дополнение P бесконечно. Докажите, что P неразрешимо.

Домашнее задание 20

1. Найдите разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ и вычислимую функцию $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что прообраз $f^{-1}(A)$ неразрешим.
2. Пусть X, Y — перечислимые множества. Докажите, что найдутся такие непересекающиеся перечислимые множества $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, $X' \cap Y' = \emptyset$, что $X \cup Y = X' \cup Y'$.
3. Докажите, что непустое подмножество \mathbb{N} разрешимо тогда и только тогда, когда оно является областью значений всюду определенной неубывающей вычислимой функции из \mathbb{N} в \mathbb{N} .
4. Докажите, что во всяком бесконечном разрешимом множестве натуральных чисел есть перечислимое неразрешимое подмножество.
5. Пусть $U(p, x)$ — главная (Геделева) универсальная вычислимая функция. Докажите, что для любой вычислимой функции трёх аргументов $V(m, n, x)$ найдётся такая всюду определённая вычислимая функция $s(m, n)$, что $V(m, n, x) = U(s(m, n), x)$ для всех m, n, x .