Занятие 21. Вычислимость. Универсальные вычислимые функции.

1. Существует ли универсальная вычислимая функция $V(p,x)$, такая, что

а) $V(p,x)$ всюду определена для всех p, кроме конечного числа;

б) если p — составное, то $V(p,x)=p$;

в) $V(p,x)$ нигде не определена для нечетных p;

г) $V(p,x)$ нигде не определена только для нечетных p.

2. Докажите, что если всюду определенная функция $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ вычислима и множество $A\subset\mathbb{N}$ разрешимо, то прообраз $\{x \mid f(x)\in A\}$ множества A разрешим.

3. Докажите, что функция вычислима тогда и только тогда, когда ее график перечислим.

4. Проекцией множества $A\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ на первую координату называется множество $\{x\in\mathbb{N} \mid \exists y\in \mathbb{N}\ (x,y)\in A\}$. Верно ли что

а) проекция перечислимого множества на первую координату перечислима;

б) проекция разрешимого множества на первую координату разрешима?

5. Пусть U — универсальная вычислимая функция. Докажите, что $U(p,p)$ не определено для некоторого p.

6. Пусть U — универсальная вычислимая функция. Докажите, что множество Tot программ (номеров) всюду определённых вычислимых функций неперечислимо. Более точно, множество Tot состоит из таких p, что $U(p,x)$ определена для всех $x\in\mathbb{N}$.

7. Найдите разрешимое множество $A\subseteq\mathbb{N}$ и вычислимую всюду определенную функцию $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такие, что образ $f(A)$ неразрешим.

8. а) Докажите, что существует всюду определенная функция $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, которая растет быстрее любой вычислимой. Это означает, что для любой вычислимой функции g найдется такое N, что $f(x)>g(x)$ для всех $x>N$, принадлежащих области определения g.

б) Пусть функция f растет быстрее любой вычислимой функции. Докажите, что $f(\mathbb{N})$ неразрешимо.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 21

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы. Ссылка на утверждение, доказанное на лекции или в учебнике, считается обоснованием. Ссылка на утверждение задачи из классного листка обоснованием **не считается** — нужно воспроизвести рассуждение. Также не считается обоснованием фраза "доказывается аналогично тому, что было в лекции". Необходимо повторить рассужение, сделав поправки на условие задачи.

1. Докажите, что для любой универсальной вычислимой функции U множество $\{U(p,p) : p \in \mathbb{N}\}$ совпадает с $\mathbb{N}$.

2. Верно ли, что для любой универсальной вычислимой функции U множество

а) $\{p \mid U(p,p^2)$ определено$\}$;

б) $\{p \mid U(p^2,p)$ определено$\}$

неразрешимо?

3. Докажите, что во всяком бесконечном разрешимом множестве натуральных чисел есть перечислимое неразрешимое подмножество.

4. Докажите, что бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда оно является областью значений всюду определенной возрастающей вычислимой функции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

5. Докажите, что любое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

6. Докажите, что перечислимо множество программ, которые останавливаются хотя бы на одном входе. Более формально: пусть U — универсальная вычислимая функция, а S — множество тех p, для которых функция $U(p,x)$ определена хотя бы при одном x. Тогда S перечислимо.