

Неделя 21. Вычислимость-3

1. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдется такое n , что $U(n, x) = n^2$ для всех x .

2. Перечислимое множество $W \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ называется *главным универсальным перечислимым множеством* (для класса перечислимых подмножеств \mathbb{N}) если для любого перечислимого множества $V \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ существует всюду определенная вычислимая функция $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что

$$(n, x) \in V \Leftrightarrow (s(n), x) \in W.$$

Докажите, что главное универсальное перечислимое множество существует.

3. Существует ли множество натуральных чисел, к которому m -сводится любое другое множество натуральных чисел?

4. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что для любой всюду определённой функции $h(n)$ найдется бесконечно много неподвижных точек, то есть таких чисел p , что $U(p, x) = U(h(p), x)$.

5. Пусть $W \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ является главным универсальным перечислимым множеством. Докажите, что существует такое n , что $W_n = \{n\}$. Через W_n мы обозначаем множество $\{k \mid (n, k) \in W\}$.

6. Постройте неглавную универсальную вычислимую функцию.

7. Докажите, что существует перечислимое множество $P \subseteq \mathbb{N}$, такое что P пересекается с любым бесконечным перечислимым множеством в \mathbb{N} , и при этом дополнение P бесконечно. Докажите, что P неразрешимо.

Домашнее задание 21

1. Пусть множество $K \subseteq \mathbb{N}$ перечислимо, но неразрешимо. Докажите, что ни множество $K \times \mathbb{N} \setminus K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ не является перечислимым, ни его дополнение.
2. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдётся такое n , что $U(n, x) = n + x$ для всех x .
3. Существует ли главная универсальная вычислимая функция $U(n, x)$, такая что множество номеров $\{n \mid U_n \text{ — нигде не определенная функция}\}$ совпадает с множеством четных чисел?
4. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Обозначим через $K \subset \mathbb{N}^2$ множество таких пар (k, n) , что функция $U(k, x)$ является продолжением функции $U(n, x)$ (т.е. $U(k, x) = U(n, x)$ на области определения функции $U(n, x)$). Докажите, что множество K неразрешимо.
5. Пусть $U(p, x)$ — универсальная вычислимая функция. Докажите, что неперечислимо множество T таких номеров t , что $U(t, x)$ определена для всех x .