Дискретная математика **Основной поток**

Занятие 22. Вычислимость–3: главные нумерации

1. Пусть $U(x, y)$ — универсальная вычислимая функция. Докажите, что $V(x, y) = U(y, x)$ не является универсальной.

2. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что неразрешимо множество тех программ, которые вычисляют функцию $x \mapsto x^2$. Более формально речь идёт о множестве

$$\{p \mid U(p, x) = x^2 \text{ для всех } x\}.$$

3. Докажите, что существует n, такое что $U(n, x) = n^2$.

4. Перечислимое множество $W \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ называется *главным универсальным перечислимым множеством* (для класса перечислимых подмножеств $\mathbb{N}$) если для любого перечислимого множества $V \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ существует всюду определенная вычислимая функция $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что

$$(n, x) \in V \Leftrightarrow (s(n), x) \in W.$$

Докажите, что главное универсальное перечислимое множество существует.

5. Используя теорему Успенского–Райса, докажите, что для любой главной универсальной функция U множество

$$\{n \mid U(n, x) \text{ не определена для любого } x\}$$

программ, задающих нигде не определенную функцию, неперечислимо.

Указание: для любой универсальной функции перечислимо множество программ, которые останавливаются хотя бы на одном входе.

6. Постройте универсальную нумерацию, в которой нигде не определенная функция будет находиться

а) только на нулевом месте;

б) только на простых местах.

Будут ли эти нумерации главными?

7. (Программа, печатающая свой текст.) Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция.

а) Докажите, что найдется такое n, что $U(n, x) = n$ для всех x.

б) Докажите, что таких n бесконечно много.

в) Докажите, что множество

$$\{n \mid U(n, x) = n \text{ для всех } x\}$$

неразрешимо. (Применима ли в данном случае теорема Успенского–Райса?)

8. (Автоматическая композиция программ.) Пусть $V(p, x)$ — универсальная вычислимая функция и существует такая всюду определённая функция $C(p, q)$, которая по номерам p и q вычислимых функций выдаёт номер их композиции (то есть $V(C(p, q), x) = V(p, V(q, x))$. Докажите, что V — главная.

9. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что для любой всюду определённой функции $h(n)$ найдется бесконечно много неподвижных точек, то есть таких чисел p, что $U(p, x) = U(h(p), x)$.

10*. (Теорема Роджерса: все главные функции изморфны.) Пусть $U_1(p, x)$, $U_2(p, x)$ — две главные универсальные вычислимые функции. Докажите, что существует такая вычислимая биекция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $U_1(p, x) = U_2(f(p), x)$ и $U_1(f^{-1}(p), x) = U_2(p, x)$ для всех p и x.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 22

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы. Ссылка на утверждение, доказанное на лекции или в учебнике, считается обоснованием. Ссылка на утверждение задачи из классного листка обоснованием **не считается** — нужно воспроизвести рассуждение.

1. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдется бесконечно много таких p, что $U(p, x) = 2017$ для какого-то x.

2. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдётся такое n, что $U(n, x) = nx$ для всех x.

3. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция, а $V(n, x)$ — вычислимая функция от двух аргументов. Докажите, что найдётся такое p, что $U(p, x) = V(p, x)$ для всех x.

4. Существует ли такая главная универсальная функция $U(p, x)$, в которой множество программ I, вычисляющих определенные в 0 функции, совпадает с множеством чётных чисел?

5. Тот же вопрос про неглавную нумерацию.

6. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Обозначим через $K \subset \mathbb{N}^2$ множество таких пар (k, n), что функция $U_k(x) = U(k, x)$ является продолжением функции $U_n(x) = U(n, x)$ (т.е. $U(k, x) = U(n, x)$ если $U(n, x)$ определена). Докажите, что множество K неразрешимо.