Дискретная математика, основной поток. **Решения задач экзамена 28.03.16**

1. Вероятность события A равна 0.8, вероятность события B равна 0.5, а вероятность события $A \cup B$ равна 0.9. Найдите условную вероятность $\Pr[A \mid B]$.

Решение. *Ответ*: 0.8.

Формула включений и исключений для вероятностей говорит, что

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B].$$

Поэтому

$$\Pr[A \cap B] = 0.8 + 0.5 - 0.9 = 0.4\ .$$

По определению условной вероятности получаем $\Pr[A \mid B] = \Pr[A \cap B]/\Pr[B] = 0.4/0.5 = 0.8$.

2. Сколькими способами можно расставить числа от 1 до 9 в последовательность так, чтобы чётные числа 2, 4, 6, 8 шли раньше чисел 5, 7, 9? Ответом должно быть число в десятичной записи.

Решение. *Ответ*: 10368.

Требуемая последовательность однозначно задается выбором: (а) множества позиций для чисел 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (всего $\binom{9}{7} = 36$ вариантов); (б) порядка, в котором идут числа 1, 3 ($2! = 2$ варианта); (в) порядка, в котором идут числа 2, 4, 6, 8 ($4! = 24$ варианта); (в) порядка, в котором идут числа 5, 7, 9 ($3! = 6$ вариантов).

Действительно, на первых 4 позициях из множества, выбранного в п. (а) обязаны стоять числа 2, 4, 6, 8 (в выбранном в п. (в) порядке), а на последних трёх позициях — числа 5, 7, 9 (в выбранном в п. (г) порядке).

По правилу произведения получаем искомое количество:

$$36 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 6 = 216 \cdot 48 = 10368.$$

3. Булева функция $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда последовательность ее аргументов $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ неубывающая. Докажите, что существует схема в стандартном базисе размера $O(n)$, вычисляющая f_n.

Решение. Последовательность, составленная из нулей и единиц, не является неубывающей тогда и только тогда, когда для некоторых $i < j$ выполняется $x_i = 1$, $x_j = 0$. Это равносильно тому, что для некоторого k выполняется $x_k = 1$, $x_{k+1} = 0$.

Таким образом, $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\bigvee_{k=1}^{n-1} (x_k \wedge \neg x_{k+1}) = 1,$$

что в силу формул де Моргана равносильно равенству

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{k=1}^{n-1} (\neg x_k \vee x_{k+1})$$

для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Из последней формулы ясно, как построить искомую схему:

– вычислим все дизъюнкты $\neg x_k \vee x_{k+1}$ (это $O(n)$ присваиваний);

– вычислим конъюнкцию всех этих дизъюнктов (еще $O(n)$ присваиваний).

4. Счётно ли множество бесконечных последовательностей $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ целых чисел, в которых для любого i выполняется равенство $x_{i+1}x_i = x_i^2$?

Решение. *Ответ*: да, счётно.

При $x_i \neq 0$ условие на соседние члены последовательности равносильно $x_{i+1} = x_i$. При $x_i = 0$ условие выполняется при любом x_{i+1}. Таким образом, последовательности, удовлетворяющие условию задачи, имеют вид: начальный отрезок из одних нулей (длины k, возможно $k = 0$) и далее все члены последовательности равны какому-то целому числу x. Если $x = 0$, получаем последовательность из одних нулей. Все остальные последовательности взаимно однозначно соответствуют парам (k, x), $x \neq 0$.

Таким образом, рассматриваемое множество последовательностей равномощно $\mathbb{N}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})\cup\{(0, 0, \dots)\}$.

Осталось заметить, что $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ счётно, и декартово произведение счётных множеств счётно и добавление одного элемента к бесконечному множеству не изменяет его мощность.

5. Функция $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ сопоставляет двоичной строке x строку $1^{\Delta(x)}$, где $\Delta(x)$ — модуль разности между количеством нулей и единиц в строке x. Не ссылаясь на тезис Чёрча–Тьюринга, докажите существование машины Тьюринга, которая вычисляет функцию $f(x)$. (Многоленточные машины Тьюринга также допустимы.)

Решение. Докажем существование 3-ленточной машины Тьюринга, вычисляющей f. Искома машина является последовательным соединением трёх машин M_1, M_2 и M_3. Для определённости полагаем, что лента входа — первая, а лента результата — вторая.

Машина M_1 проходит по входному слову (записанному на первой ленте) слева направо, не изменяя символов входного слова, и прекращает работу (передаёт управление машине M_2), когда под головкой оказывается пустой символ. Если головка M_1 над символом 1 на первой ленте, то машина пишет на вторую ленту символ 1 и сдвигает головку второй ленты влево. Если головка M_1 над символом 0 на первой ленте, то машина пишет на третью ленту символ 1 и сдвигает головку третьей ленты влево.

Индукцией по длине слова легко проверяется, что в момент остановки машины M_1 на второй ленте справа от головки написано столько единиц, сколько их было во входном слове, а на третьей ленте справа от головки написано столько единиц, сколько во входном слове было нулей.

Машина M_2 выполняет сокращения на второй и третьей лентах. Она начинает работу с того, что сдвигает головки вправо. После этого пока под обеими головками единицы, машина M_2 заменяет их на пустые символы и сдвигает головки вправо. Эта машина заканчивает работу и передаёт управление последней машине в тот момент, когда хотя бы под одной из головок оказывается пустой символ.

Поскольку за один такт работы M_2 со второй и третьей ленты стирается по одной единице, в конце её работы возможны три ситуации: (а) обе ленты пусты (это означает, что количество нулей во входном слове равно колчеству единиц); (б) на второй ленте записано сколько-то единиц, а третья лента пуста и безвидна (это означает, что единиц во входном слове было больше, чем нулей, и на второй ленте написано в точности слово $f(x)$); (в) вторая лента пустая, а на третьей написано слово из единиц (это означает, что нулей было больше и на третьей ленте написано $f(x)$).

Машина M_3 оформляет результат. Её работа зависит от того, какие символы находятся под головками в момент начала работы. Если оба символа пустые, то M_3 немедленно останавливается. Если символ на второй ленте 1, а на третьей — машина M_3 также останавливается. Если же, наоборот, на второй ленте пустой, а на третьей — 1, машина M_3 копирует слово из единиц с третьей ленты на вторую и переводит головку в положение над самой левой единицей.

Инспекцией случаев (а)–(в) убеждаемся, что описанное соединение машин M_1, M_2 и M_3 действительно вычисляет функцию f.

6. Докажите, что найдется целое число, которое в десятичной системе счисления записывается одними цифрами 7 и при этом делится на 121.

Решение. Целое число, которое в десятичной записи выражается одними семёрками, имеет вид

$$S_n = 7 + 7 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^2 + \cdots + 7 \cdot 10^{n-1} = 7(1 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1}) = 7 \cdot \frac{10^n - 1}{9}, \quad n \geq 0.$$

Числа 7 и 9 взаимно просты с 121. Поэтому равносильны сравнения

$$S_n \equiv 0 \pmod{121}, \quad 9S_n = 7 \cdot (10^n - 1) \equiv 0 \pmod{121}, \quad 10^n - 1 \equiv 0 \pmod{121}.$$

Но 10 и 121 также взаимно просты. Поэтому при $n = \varphi(121)$ по теореме Эйлера выполняется $10^n \equiv 1 \pmod{121}$, что равносильно $S_n \equiv 0 \pmod{121}$.

Второе решение. Прямое доказательство, что число из 22 семерок делится на 121:

$$\underbrace{777\ldots777}_{\text{22 цифры}} = 7 \cdot \underbrace{111\ldots111}_{\text{22 цифры}} = 7 \cdot 11 \cdot \underbrace{10101\ldots101}_{\text{11 единиц}}$$

Последний множитель делится на 11 по критерию делимости на 11: знакопеременная сумма цифр равна

$$1 - 0 + 1 - 0 + \cdots + 1 = 11.$$

7. Существует ли такая универсальная вычислимая функция $U\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что все программы, вычисляющие всюду определенные функции, имеют только четные номера? То есть, если $U(n,x)$ определена при всех x, то n чётное.

Решение. *Ответ*: да.

Неформально искомая универсальная вычислимая функция получается из некоторой универсальной вычислимой функции умножением «номеров программ» на 2 и присваиванием нечётных номеров программ нигде не определённой функции.

Формально, пусть $V(p,x)$ — некоторая универсальная вычислимая функция. Тогда искомая функция имеет вид:

$$U(n,x) = \begin{cases} V(n/2, x), & \text{если } n \text{ чётное,} \\ \text{не определена} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что эта функция вычислима. Она универсальна, так как в силу универсальности V для любой вычислимой функции f существует такое число p, что $f = V(p,\cdot)$. Но тогда $f = U(2p,\cdot)$.

Осталось заметить, что при нечётном n функция $U(n,x)$ не определена ни при каком x.

Для простого неориентированного графа G с множеством вершин V и множеством ребер E обозначим через d среднюю степень вершины в графе, то есть $d = \sum_{v\in V} d(v)/|V|$. Рассмотрим вероятностное пространство, исходами в котором являются пары (e,v), где v является одним из концов ребра e (т.е. элементами вероятностного пространства являются концы ребер). Все исходы равновероятны. Случайная величина D на исходе (e,v) принимает значение $d(v)$.

Пусть средняя степень графа равна $d = 20$ и по крайней мере 1% вершин имеют степень ≥ 1000. Докажите, что $\mathrm{E}[D] \geq 500$.

Решение. Поскольку сумма степеней вершин равна удвоенному количеству рёбер (то есть количеству концов рёбер), количество концов рёбер в этом графе равно $20n$, где n — количество вершин в графе. Это и есть количество исходов в данном вероятностном пространстве.

При этом по крайней мере $1000 \cdot 0.01n = 10n$ концов — «тысячники», то есть вершины степени ≥ 1000. Таким образом, вероятность того, что исход окажется тысячником, не меньше $1/2$. Но тогда

$$\mathrm{E}[D] = \sum_{(e,v)} d(v) \Pr[(e,v)] \geq 1000 \cdot \Pr_{(e,v)}[v \text{ — тысячник}] \geq 500.$$