Дискретная математика, пилотный поток. **Решения задач экзамена 28.03.16**

1. Пусть дан простой неориентированный граф G. Рассмотрим следующее отношение R на множестве его вершин V: $(u, v) \in R$ тогда и только тогда, когда есть путь из u в v нечетной длины. Для всякого ли G отношение R является отношением эквивалентности?

Решение. *Ответ*: нет.

Например, если G — граф, состоящий из одной вершины v, отношение R не является рефлексивным, поскольку из v в v нет пути нечетной длины.

2. Сколько существует таких троек (x, y, z), что $x, y, z \in \{1, 2, \ldots, 21\}$ и

$$x \cdot y \cdot z \equiv 5 \pmod{21}?$$

Ответом должно быть число.

Решение. *Ответ*: 144.

Рассмотрим произвольные x и y, введем обозначение $a = x \cdot y$. Заметим, что a взаимно просто с 21 тогда и только тогда, когда и x, и y взаимнопросты с 21.

Заметим, что если a взаимно просто с модулем 21, то существует единственный вычет z по модулю 21, такой что

$$a \cdot z \equiv 5 \pmod{21}.$$

Если же a не взаимно просто с 21, то такого вычета z не существует. Оба эти утверждения доказывались на лекциях.

Таким образом, требуемых троек (x, y, z) столько же, сколько пар (x, y), таких что и x, и y взаимно просты с 21. Всего среди чисел $\{1, 2, \ldots, 21\}$ есть 9 чисел не взаимно простых с 21: 3, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 18, 21. Так что каждое из чисел x и y можно выбрать из оставшихся 12 вариантов. Всего получается 144 пары.

3. Булева функция $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда последовательность ее аргументов $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ неубывающая. Докажите, что существует булева схема размера $O(n)$, вычисляющая f_n.

Решение. Последовательность, составленная из нулей и единиц, не является неубывающей тогда и только тогда, когда для некоторых $i < j$ выполняется $x_i = 1$, $x_j = 0$. Это равносильно тому, что для некоторого k выполняется $x_k = 1$, $x_{k+1} = 0$.

Таким образом, $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\bigvee_{k=1}^{n-1} (x_k \wedge \neg x_{k+1}) = 1,$$

что в силу формул де Моргана равносильно равенству

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{k=1}^{n-1} (\neg x_k \vee x_{k+1})$$

для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Из последней формулы ясно, как построить искомую схему:

– вычислим все дизъюнкты $\neg x_k \vee x_{k+1}$ (это $O(n)$ присваиваний);

– вычислим конъюнкцию всех этих дизъюнктов (еще $O(n)$ присваиваний).

4. Счётно ли множество бесконечных последовательностей (x_i) целых чисел, в которых для любого i выполняется равенство $x_{i+1}x_i = x_i^2$?

Решение. *Ответ*: да, счётно.

При $x_i \neq 0$ условие на соседние члены последовательности равносильно $x_{i+1} = x_i$. При $x_i = 0$ условие выполняется при любом x_{i+1}. Таким образом, последовательности, удовлетворяющие условию задачи, имеют вид: начальный отрезок из одних нулей (длины k, возможно $k = 0$) и далее все члены последовательности равны какому-то целому числу x. Если $x = 0$, получаем последовательность из одних нулей. Все остальные последовательности взаимно однозначно соответствуют парам (k, x), $x \neq 0$.

Таким образом, рассматриваемое множество последовательностей равномощно $\mathbb{N}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})\cup\{(0,0,\dots)\}$.

Осталось заметить, что $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ счётно, и декартово произведение счётных множеств счётно и добавление одного элемента к бесконечному множеству не изменяет его мощность.

5. Рассмотрим простой неориентированный граф на 100 вершинах, в котором каждые две вершины соединены ребром. Два игрока по очереди удаляют по одному ребру из графа. Игрок проигрывает, если после его хода граф становится несвязным. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Решение. *Ответ*: У первого.

Заметим, что верно такое утверждение: если перед очередным ходом граф связен, то игрок может удалить ребро так, чтобы граф остался связным, тогда и только тогда, когда граф не является деревом. Действительно, по одному из эквивалентных определений, которые были в лекциях, дерево — это минимальный связный граф, то есть связный граф, в котором нельзя удалить ни одного ребра без нарушения связности.

Таким образом, игрок проигрывает, когда перед его ходом граф является деревом, в противном случае он всегда может сделать ход. В дереве на 100 вершинах 99 ребер. Изначально ребер в графе

$$100(100-1)/2 = 4950.$$

Следовательно, игроки сделают нечетное число ходов, а значит первый игрок выиграет.

6. Пусть $K \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ – некоторое множество. Определим множество $L \subseteq \mathbb{N}$ следующим образом: $x \in L$ тогда и только тогда, когда существуют $y, z \geq x$, такие что $(y, z) \in K$. Пусть множество K разрешимо. Докажите, что множество L разрешимо.

Решение. Заметим, что если некоторый x лежит в множестве L, то и любой $x' < x$ также лежит в L. Действительно те же y, z, такие что $y, z \geq x$, $(y, z) \in K$, которые обеспечивают принадлежность x множеству L, точно также обеспечивают принадлежность x' множеству L.

Следовательно, если в множестве L есть максимальный элемент n, то $L = \{1, \dots, n\}$. Если же в L нет максимального элемента, то $L = \mathbb{N}$.

Поскольку и множество $\mathbb{N}$, и все конечные множества разрешимы, то в любом случае множество L разрешимо.

7. Определим функцию $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом: $S(n)$ равно максимальному числу шагов, которое делает на пустом входе какая-либо останавливающаяся машина Тьюринга с не более чем n состояниями и в алфавите размера не больше n. Докажите, что функция S невычислима.

Решение.

В курсе доказывалось, что неразрешима следующая задача: по описанию машины Тьюринга определить, останавливается ли машина на пустом входе. Мы покажем, что если бы функция S была вычислима, то и указанная задача была бы разрешима.

Действительно, предположим, что S вычислима. Тогда по данной на вход машине Тьюринга M найдем максимум n из числа состояний машины и размера ее алфавита. Пользуясь вычислимостью S найдем $S(n)$. Теперь запустим машину M на пустом входе, одновременно считая шаги машины M. Если число шагов машины M превышает $S(n)$, выдаем ответ "нет". Если же M успевает остановиться раньше, выдаем ответ "да".

8. Для простого неориентированного графа G с множеством вершин V и множеством ребер E обозначим среднюю степень вершины в графе d, то есть $d = \sum_{v \in V} d(v)/|V|$. Рассмотрим вероятностное пространство, исходами в котором являются полурёбра графа (т.е. ребро и один из его концов). Все исходы равновероятны. Случайная величина D на исходе (e, v) принимает значение $d(v)$.

Пусть средняя степень равна $d = 20$ и по крайней мере 1% вершин имеют степень ≥ 1000. Докажите, что $\mathrm{E}[D] \geq 500$.

Решение. Поскольку сумма степеней вершин равна удвоенному количеству рёбер (то есть количеству концов рёбер), количество концов рёбер в этом графе равно $20n$, где n — количество вершин в графе. Это и есть количество исходов в данном вероятностном пространстве.

При этом по крайней мере $1000 \cdot 0.01n = 10n$ концов — «тысячники», то есть вершины степени ≥ 1000. Таким образом, вероятность того, что исход окажется тысячником, не меньше $1/2$. Но тогда

$$\mathrm{E}[D] = \sum_{(e,v)} d(v) \Pr[(e,v)] \geq 1000 \cdot \Pr_{(e,v)}[v \text{ — тысячник}] \geq 500.$$