Программа коллоквиума по дискретной математике на пилотном потоке

В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет три вопроса: контрольный вопрос на понимание определения, задача на понимание теорем и доказательств, вопрос на знание доказательств (нужно будет доказать теорему из курса). На подготовку ответа у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаете устно одному из преподавателей.

Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Вы получаете свой первый балл как только приходите на коллоквиум, еще 2 балла — за полный ответ на контрольный вопрос на понимание определений, 3 балла — за правильное решение задачи, ну и последние 4 балла — за полный ответ на вопрос на знание доказательств.

По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.

1 Список определений

Контрольный вопрос на понимание определений включает в себя формулировку одного определения из списка ниже и контрольный вопрос по этому определению. Пример: «Функции (как частный случай отношений). Образы и прообразы множеств. Обратная функция. Пусть $f(x) = x^2$ — функция из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$. Найдите полный прообраз множества $\{1, 2, 3, 4\}$.»

1. Делимость целых чисел. Деление целых чисел с остатком.
2. Сравнения по модулю, вычеты. Обратимые вычеты.
3. Комбинаторные игры.
4. Стратегии. Выигрышные стратегии.
5. Разрешающие деревья.
6. Адаптивные и неадаптивные алгоритмы в модели разрешающих деревьев.
7. Булевы схемы. Представление схем графами.
8. Схемная сложность булевой функции.
9. Вычислимые функции. Разрешимые и перечислимые множества.
10. Универсальная вычислимая функция.
11. Главная универсальная вычислимая функция.
12. Понятия m-сводимости и m-полноты.
13. Машина Тьюринга (с одной лентой и несколькими лентами).
14. Функция, вычислимой на машине Тьюринга. Тезис Черча-Тьюринга.
15. Задача достижимости на графе подстановок.

2 Примерные задачи на понимание определений

На коллоквиуме Вам может попасться похожая по уровню задача не из этого списка.

1. Приведите пример таких целых чисел a, b, c, что НОД$(ab, c) \neq$ НОД$(a, c) \cdot$ НОД(b, c).

2. На сколько нулей заканчивается число 16! ?

3. Найдите остаток от деления 2^{38} на 37.

4. Решите диофантово уравнение $13x + 21y = 7$.

5. Сколько есть положительных целых делителей у числа 6^6?

6. На столе лежит две кучи камней, в одной 4, в другой – 6. За один ход игроку разрешается взять из одной кучи 2 или 3 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Перечислите все выигрышные позиции первого игрока.

7. Рассмотрим булеву функцию $EQ(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, равную 1 тогда и только тогда, когда $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$. Два игрока по очереди выбирают значения одной из переменных функции. Первый игрок выигрывает, если после фиксации всех переменных функция оказывается равной 0. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

8. Какова сложность функции $x \wedge y \wedge z$ в модели разрешающих деревьев?

9. Дано n монет разного веса, за одно взвешивание разрешается сравнить по весу две монеты. Пусть после нескольких взвешивание мы можем однозначно указать вторую по тяжести монету. Можем ли мы при этом указать самую тяжелую монету?

10. Пусть булева функция $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Постройте булеву схему, вычисляющую функцию f.

11. Пусть схемная сложность функции f не больше A, а схемная сложность функции g не больше B. Докажите, что схемная сложность функции $f \oplus g$ не больше $A + B + 5$.

12. Пусть A — разрешимое множество, а B — перечислимое. Верно ли, что $B \setminus A$ — перечислимое?

13. Пусть $U(n, x)$ универсальная вычислимая функция. Положим $V(n, x) = U(n - 1, x)$, если $n > 0$, и $V(n, x) = 0$ иначе. Является ли $V(n, x)$ универсальной вычислимой функцией?

14. Пусть $U(n, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдется бесконечно много таких n, что $U(n, x) = x$ для любого x.

15. Верно ли, что если множества равномощны, то они m-сводятся друг к другу? Верно ли, что если множества m-сводятся друг к другу, то они равномощны?

16. К каким подмножествам натуральных чисел m-сводится пустое множество?

17. Постройте машину Тьюринга, вычисляющей нигде неопределенную функцию.

18. Постройте машину Тьюринга, вычисляющую функцию, равную 0 на всех входах.

19. Пусть граф на множестве слов в алфавите $\{a, b\}$ задан набором правил подстановки

$$\{ab \to ba,\ ba \to ab\}.$$

Какие слова являются достижимыми в таком графе?

3 Вопрос на знание доказательств

1. Неравенство Маркова.
2. Нижняя оценка на максимальное количество ребер в разрезе.
3. Асимптотика среднего биномиального коэффициента $\binom{2n}{n}$. Верхняя и нижняя оценка произвольного биномиального коэффициента $\binom{n}{k}$.
4. Свойства операции делимости и деления с остатком. Единственность остатка и частного.
5. Сравнение $ax \equiv 1 \pmod N$ имеет решение тогда и только тогда, когда НОД$(a, N) = 1$.
6. Теорема о разрешимости линейного диофантова уравнения, формула для решений.
7. Корректность алгоритма Евклида и расширенного алгоритма Евклида.
8. Основная теорема арифметики.
9. Китайская теорема об остатках.
10. Малая теорема Ферма. Теорема Эйлера.
11. Формула для функции Эйлера.
12. Симметричные стратегии, примеры.
13. Теорема о существовании выигрышной стратегии в конечной ациклической игре.
14. Игра Ним, выигрышная стратегия в ней.
15. Задача об угадывании числа, адаптивная и неадаптивная модель. Верхняя и нижняя оценки.
16. Задача о сортировке, верхняя и нижняя оценка.
17. Задача о нахождении самой тяжелой монеты. Адаптивная и неадаптивная модель, верхние и нижние оценки.
18. Задача о связности графа в модели разрешающих деревьев. Верхняя и нижняя оценка.
19. Булевы схемы для сложения и умножения n-битовых чисел. Оценка размера.
20. Булева схема для задачи о связности графа. Оценка размера.
21. Верхняя оценка размера схемы для произвольной функции. Существование сложных функций.
22. Простейшие свойства разрешимых и перечислимых множеств: замкнутость относительно теоретико-множественных операций.
23. Эквивалентные определения перечислимых множеств.
24. Теорема Поста. Вычислимая биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

25. Существование вычислимой функции без всюду определенного вычислимого продолжения. Существование перечислимого неразрешимого множества.

26. Существование главной универсальной функции.

27. Теорема Райса-Успенского.

28. Существование не главной универсальной функции.

29. Теорема о неподвижной точке. Существование программы, печатающий свой текст.

30. Простейшие свойства m-сводимости.

31. Пример m-полного перечислимого множества.

32. Лемма об очистке мусора для машин Тьюринга. Вычислимость композиции вычислимых функций.

33. Связь одноленточных и многоленточных машин Тьюринга.

34. Описание универсальной машины Тьюринга.

35. Неразрешимость задачи достижимости для графа подстановок слов.