Дискретная математика **Пилотный поток**

Неделя 3. Множества и логика

1. Докажите тождества

а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

б) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

в) $(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B$;

г) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

2. Докажите, что

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \cup \dots \cup (A_n \triangle B_n)$$

для любых множеств A_i, B_i.

3. Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции $\cap$, $\cup$, $\setminus$, неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

4. В группе студентов есть один, который знает C++, java, python, huskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два — 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Каково наименьшее количество студентов в такой группе?

5. Найдите значение булевой функции при всех значениях переменных:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_2 \wedge x_3) \oplus (x_3 \wedge x_1).$$

6. Для всех $n \geqslant 1$ найдите значение следующей булевой функции при всех значениях переменных:

$$\bigoplus_{S \neq \varnothing} \bigwedge_{i \in S} x_i = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \wedge x_3) \oplus \dots.$$

7. Докажите полноту системы связок, состоящей из одной связки *штрих Шеффера* $x \mid y = \neg(x \wedge y)$.

8. Является ли полной система связок

а) $\{\wedge, \vee, \setminus\}$, где $x \setminus y$ равна $x \wedge \neg y$?

б) $\{\neg; \equiv\}$, где $x \equiv y$ равна $(x \to y) \wedge (y \to x)$?

9. Назовем функцией голосования $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ булеву функцию, значение которой совпадает с тем значением, которое принимает большинство переменных (если нулей и единиц среди переменных поровну, то $\mathrm{MAJ} = 0$). Запишите $\mathrm{MAJ}(x, y, z)$ в виде многочлена Жегалкина.

10. КНФ (конъюнктивной нормальной формой) называется конъюнкция дизъюнкций переменных или их отрицаний. Докажите, что любое высказывание можно выразить в виде КНФ.

11. Размером ДНФ будем называть число вхождений переменных в нее. Каков минимальный размер ДНФ, задающей функцию $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$?

12. Представьте функцию, заданную многочленом Жегалкина от переменных $x_1, \dots, x_n$

$$\bigoplus_{|S| - \text{ четно},\ S \neq \varnothing} \bigwedge_{j \in S} x_j = (x_1 \wedge x_2) \oplus \dots \oplus (x_{n-1} \wedge x_n) \oplus (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \oplus \ldots$$

в виде ДНФ с как можно меньшим количеством конъюнктов.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 3

1. Верно ли, что для любых множеств A, B и C выполняется равенство $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$?

2. Клуб по "Что, где, когда" из 10 человек хочет отправить команду на соревнование. При этом в команде может быть любое число участников от 1 до 9. Чтобы отправить сильнейшую команду клуб хочет провести ряд отборочных игр команда на команду так, чтобы каждое подмножество членов клуба поучаствовало в играх в качестве команды ровно один раз. Докажите, что в таких играх каждая команда обязательно должна играть с командой в точности всех остальных членов клуба.

3. Для всех $n \geqslant 1$ найдите значение следующей булевой функции при всех значениях переменных:

$$\bigoplus_{S,\ |S| \text{ - нечетно}} \bigwedge_{i \in S} x_i = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \oplus \ldots.$$

4. Сколькими способами можно переставить числа 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы число 1 не стояло первым или третьим, а числа 4 и 5 не стояли рядом?

5. Является ли полной система связок $\{\vee; \to\}$

6. Можно ли выразить функцию $\mathrm{MAJ}(x_1, \ldots, x_n)$ с помощью ДНФ, в которой не используется отрицание?

7. Размером ДНФ будем называть число вхождений переменных в нее. Каков минимальный размер ДНФ, задающей функцию $\mathrm{MAJ}(x_1, \ldots, x_n)$ и такой, что в ней не используется отрицаний?