Дискретная математика **Пилотный поток**

Неделя 9. Графы-2

1. Найдите наибольшее целое положительное число, в котором все цифры разные, а любые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, делящееся на 7.

2. Известно, что в ориентированном графе на $\geqslant 2$ вершинах из любой вершины в любую другую идёт ровно один простой путь. Верно ли, что выходные (они же исходящие) степени вершин в этом графе равны 1?

3. а) Докажите, что любое дерево 2-раскрашиваемо (существует правильная раскраска в 2 цвета).

б) Сколько есть правильных 2-раскрасок у дерева?

4. Докажите, что в дереве на $2n$ вершинах можно выбрать n вершин так, что ни одна пара выбранных вершин не соединена ребром (такие множества вершин называются *независимыми*).

5. Имеется связный граф. Докажите, что в нём можно выбрать одну из вершин так, чтобы после её удаления вместе со всеми ведущими из неё рёбрами останется связный граф.

6. а) Докажите, что есть такое двоичное слово, в котором любая комбинация из 10 нулей и единиц встречается ровно один раз.

б) Пусть двоичное слово удовлетворяет условию предыдущего пункта и начинается на 0100011101. Найдите последние 8 цифр этого слова.

7. Пусть в ориентированном графе выходная степень каждой вершины равна входной степени. Если стереть ориентацию на ребрах, то получится связный неориентированный граф. Докажите, что ориентированный граф сильно связен.

8. Найдите максимальное количество простых путей с заданными концами в ориентированном ациклическом графе на n вершинах.

9. Докажите, что в ориентированном графе G нет пути из вершины s в вершину t тогда и только тогда, когда вершины графа можно разбить на два непересекающихся множества S и T, таких что $s \in S$, $t \in T$ и в графе нет ребер из вершин из множества S в вершины из множества T.

10. Граф получен из цикла на $2n$ вершинах добавлением рёбер, соединяющих противоположные вершины.

а) При каких n этот граф 2-раскрашиваемый?

б) При каких n вершины этого графа можно правильно раскрасить в 3 цвета?

11. Докажите, что S — вершинное покрытие в неориентированном графе $G = (V, E)$ тогда и только тогда, когда $V \setminus S$ — независимое множество.

12. Докажите, что если в неоринтированном графе на $n \geqslant 3$ вершинах степени всех вершин не меньше $n/2$, то в нем графе есть гамильтонов цикл.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 9

1. Последовательность чисел определена рекуррентно: $a_0 = 5$; $a_{n+1} = a_n^2 + 3$. Найдите последнюю цифру числа a_{2015}.

2. Сколько существует правильных раскрасок графа–пути длины n (вершин в этом графе $n+1$) в красный, синий и зелёный цвета?

3. Пусть в связном неориентированном графе ровно 4 вершины нечетной степени. Докажите, что его ребра можно разбить на два непересекающихся множества ребер, так что каждое из множеств ребер можно обойти путем, проходящим по каждому ребру ровно один раз.

4. Есть ли в булевом кубе путь, проходящий по каждой вершине ровно один раз?

5. Пусть в ориентированном графе для любой пары вершин u, v есть либо ребро (u, v), либо ребро (v, u) (ровно одно из двух). Докажите, что в таком графе есть вершина, из которой до любой другой можно дойти за 2 хода.

6. Пусть в ориентированном графе для любой пары вершин u, v есть либо ребро (u, v), либо ребро (v, u) (ровно одно из двух). Докажите, что в таком графе есть простой ориентированный путь, включающий в себя все вершины.

7. Назовем не 2-раскрашиваемый граф минимальным, если после удаления любого ребра он становится 2-раскрашиваемым. Докажите, что в минимальном не 2-раскрашиваемом графе на 1000 вершинах есть хотя бы одна изолированная вершина (т.е. вершина степени 0).

8. На столе по кругу расставлено несколько коробочек, в каждой лежит по несколько камушков. За один ход разрешается взять все камушки из одной коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному камушку. На каждом следующем ходу камушки берутся из той, коробочки, в которую попал последний камушек на предыдущем ходу. Можно ли утверждать, что рано или поздно повторится начальное расположение камушков?