Неделя 10. Вероятность-1

В классных задачах нужно кроме ответа на основной вопрос указать возникающие в задаче вероятностное пространство и вероятностное распределение.

1. При бросании двух кубиков какова вероятность в сумме получить 5?

2. Найдите вероятность того, что в шести подбрасываниях монеты выпадет ровно три орла.

3. Найдите вероятность того, что при броске трёх игральных кубиков число выпавших очков чётно или кратно 3.

4. Колоду из 36 карт раздают четырем людям, по 9 карт каждому.

а) Какова вероятность того, что у каждого человека все карты одной масти?

б) Какова вероятность того, что каждый получит по одному королю?

5. Десять учеников сдают экзамен по десяти билетам. Ученики по очереди заходят в кабинет и вытягивают случайный билет из оставшихся (в частности, последний берет единственный оставшийся билет). Вася выучил только один билет. Какова вероятность, что Васе достанется билет, который он знает, если

а) Вася тянет билет первым;

б) Вася тянет билет последним?

6. Прямоугольная таблица заполнена нулями и единицами. В каждой строке ровно n единиц, всего строк не больше 2^{n-1}. Докажите, что можно так вычеркнуть часть столбцов, чтобы в каждой строке оставшейся таблицы было меньше n единиц, но хотя бы одна единица была.

7. В самолет по очереди заходят 100 пассажиров. Первый садится на случайное место. Каждый следующий садится на свое место, если оно свободно, и на случайное место, если его место занято. Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на свое место?

8. Лягушка прыгает по вершинам правильного шестиугольника $ABCDEF$ начиная из вершины A. На каждом прыжке лягушка прыгает в одну из соседних вершин с равными вероятностями. Вершина D испачкана краской, если лягушка попадает в нее, она тоже пачкается. С какой вероятностью после n прыжков лягушка все еще не испачкается?

9. Каждый коротышка в Цветочном городе составил расписание, отметив в календаре n дней, когда он идет в гости, и k дней, когда он принимает гостей (эти дни не совпадают). При этом известно, что каждый коротышка может сходить к каждому в гости в один из дней (у первого это день, когда он идет в гости, а у второго это день приема гостей). Докажите, что в Цветочном городе живет не больше $\binom{n+k}{n}$ коротышек.

Подсказка: Незнайка вырвал все листки из своего календаря и расположил их в случайном порядке. Какова вероятность того, что все дни, в которые Незнайка ходит в гости, предшествуют всем дням, в которые Незнайка принимает гостей?

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 10

1. При бросании двух кубиков какова вероятность получить два одинаковых числа?

2. Случайно и равновероятно выбрано целое число от 1 до 100. Найдите вероятность того, что сумма цифр этого числа равна 8.

3. Бросаем кубик четыре раза. Какова вероятность того, что выпадающие числа строго возрастают? Укажите числовой ответ с абсолютной погрешностью 0.1.

4. На лотерейном билете требуется отметить 8 клеточек из 64. Какова вероятность того, что после розыгрыша, в котором также будет выбрано 8 каких-то клеток из 64 (все такие возможности равновероятны), окажется, что угаданы ровно 4 клеток? Укажите числовой ответ с относительной погрешностью 10%.

5. Шестьдесят четыре команды участвуют в турнире по олимпийской системе (команды случайно и равновероятно разбиваются на пары, парные команды играют между собой, победители проходят в следующий раунд, где процедура повторяется). Все команды упорядочены по силе, и более сильная всегда выигрывает у более слабой. Какова вероятность того, что в финале встретятся две самые сильные команды?

6. Вася и Петя бросают монету: Вася бросил ее 10 раз, а Петя — 11 раз. Чему равна вероятность того, что у Пети монета упала орлом большее число раз, чем у Васи?

7. Докажите, что найдется такой турнир, в котором любые 10 команд проиграли какой-то одной команде (победители разных десяток могут различаться).

8. (**Эта задача дается на две недели и будет учитываться в следующем домашнем задании**) Прямоугольная таблица заполнена нулями и единицами. В таблице $3n$ столбцов, в каждой строке ровно n единиц, все строки различны. Известно, что для любых двух строк найдется такой столбец, в котором в данных строках стоят единицы.

а) Докажите, что вероятность того, что случайно выбранная строка из n единиц и $2n$ нулей входит в такую таблицу, не больше 1/3.

б) Докажите, что количество строк в такой таблице не больше $\binom{3n-1}{n-1}$.

Замечание: если вы не решили пункт а), но умеете решать пункт б) с использованием пункта а), запишите это рассуждение.