

Неделя 13. Числа-1

1. Известно, что  $a, b, c, d$  — положительные целые числа,  $ab = cd$  и  $a$  делится на  $c$ . Докажите, что  $d$  делится на  $b$ .
2. При делении некоторого числа  $m$  на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число  $m$ .
3. Какой остаток даёт число  $100^{100}$  при делении на 99?
4. а) Докажите, что число  $a^3 - a$  делится на 3 при любом целом  $a$ . б) Пусть  $p$  — простое число, большее 3. Докажите, что  $p^2 - 1$  делится на 24.
5. Докажите, что если  $a \equiv b \pmod{m}$  и  $c \equiv d \pmod{m}$ , то  $ac \equiv bd \pmod{m}$ .
6. Найдите наибольший общий делитель 238 и 39.
7. Найдите решения уравнения  $45x - 37y = 25$  в целых числах.
8. Сколько положительных делителей имеет число  $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^3$ ?
9. Докажите, что  $(p - 1)!$  даёт остаток  $-1$  по модулю  $p$  для любого простого числа  $p$ .
10. Докажите, что для любого целого числа  $n \geq 2$  между  $n$  и  $n!$  есть простое число.
11. Пусть  $\text{НОД}(a, b) = 1$ . Найдите возможные значения  $\text{НОД}(a + b, a^2 + b^2)$ .
12. Формулы включения – исключения для НОК и НОД. Докажите, что для положительных  $x, y, z$  выполняются равенства
  - а)  $\text{НОК}(x, y) = \frac{xy}{\text{НОД}(x, y)}$ ;
  - б)  $\text{НОК}(x, y, z) = \frac{xyz \cdot \text{НОД}(x, y, z)}{\text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОД}(x, z) \cdot \text{НОД}(y, z)}$ ;
  - в) попробуйте выразить  $\text{НОК}(x_1, \dots, x_n)$  аналогичным образом.
13. а) Верно ли, что для всякого  $n$  существует такая арифметическая прогрессия  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , что числа  $a_1, \dots, a_n$  попарно взаимно просты?  
 б) Верно ли, что существует такая арифметическая прогрессия  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , что для всякого  $n$  числа  $a_1, \dots, a_n$  попарно взаимно просты?
14. Делимость биномиальных коэффициентов. В этой задаче  $p$  — некоторое простое число.
  - а)  $\binom{p}{k}$  делится на  $p$ .
  - б) Разделим числа  $n$  и  $k$  на  $p$  с остатком:  $n = n'p + n_0$ ,  $k = k'p + k_0$ . Тогда
 
$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n'}{k'} \binom{n_0}{k_0} \pmod{p}.$$
  - в) Запишем  $n$  и  $k$  в  $p$ -ичной системе счисления:  $n = n_0 + n_1p + \dots + n_dp^d$ ,  $k = k_0 + k_1p + \dots + k_dp^d$ . Биномиальный коэффициент  $\binom{n}{k}$  делится на  $p$  тогда и только тогда, когда в одном из разрядов  $k_i > n_i$ .
  - г) Максимальная степень  $p$ , на которую делится  $\binom{x+y}{y}$ , равна количеству переносов при сложении столбиком чисел  $x, y$ , записанных в  $p$ -ичной системе счисления.

## Домашнее задание 13

1. Найдите остаток при делении  $99^{1000}$  на 100.
2. Докажите, что число  $x + 10y$  делится на 13 тогда и только тогда, когда  $y + 4x$  делится на 13.
3. Решите сравнение  $53x \equiv 1 \pmod{42}$ .
4. Существует ли решение уравнения  $74x + 47y = 2900$  в неотрицательных целых числах?
5. Докажите, что дробь  $\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$  несократима при всех положительных целых  $n$ .
6. Найдите НОД( $3^{133} - 1, 3^{101} - 1$ ).
7. Докажите, что числитель несократимой дроби, равной  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$ , делится на  $p$  для любого простого  $p > 2$ .
8. Докажите, что число  $2^{2^n} - 1$  имеет по крайней мере  $n$  различных простых делителей.