Дискретная математика **Пилотный поток**

Неделя 14. Числа-2

1. Сформулируйте и докажите признак делимости **а)** на 9; **б)** на 11. (В десятичной системе счисления.)

2. Сформулируйте и докажите признак делимости на 17 в 16-ичной системе счисления.

3. Найдите остаток при делении числа $\underbrace{111\ldots111}_{105\text{ цифр}}$ на 107. (Использована десятичная система.)

4. Докажите, что при любом целом a число $a^{73} - a$ делится на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$.

5. Если от некоторого трёхзначного числа отнять 6, то оно разделится на 7, если отнять 7, то оно разделится на 8, а если отнять 8, то оно разделится на 9. Найдите это число.

6. Решите систему сравнений

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{13}, \\ x &\equiv 4 \pmod{14}, \\ x &\equiv 5 \pmod{15}. \end{aligned}$$

7. Решите систему сравнений

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{15}, \\ x &\equiv 4 \pmod{21}, \\ x &\equiv 5 \pmod{35}. \end{aligned}$$

8. Найдите остатки от деления **а)** 19^{10} на 66; **б)** 19^{14} на 70; **в)** 17^9 на 48; **г)** $14^{14^{14}}$ на 100.

9. Решите уравнение **а)** $\varphi(x) = x/3$; **б)** $\varphi(x) = x/4$.

10. Докажите равенство $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$ (суммирование по всем делителям числа n).

11. Докажите, что в любой арифметической прогрессии a, $a + d$, $a + 2d$, $\ldots$, $a + nd$, $\ldots$, составленной из натуральных чисел, есть бесконечно много членов, в разложении которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 14

Дедлайн: перед первым занятием в третьем модуле

1. Докажите, что при любом нечетном n число $2^{n!} - 1$ делится на n.

2. Известно, что $a^{10} + b^{10} + c^{10} + d^{10} + e^{10} + f^{10}$ делится на 11. Докажите, что $abcdfe$ делится на 11^6.

3. Найдите остаток от деления $7^{7^{7^7}}$ на 17.

4. Решите сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod{200}$.

5. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на $\ldots 0001$ в десятичной записи?

6. Докажите, что при любом k существует ровно 4 решения сравнения $x^2 \equiv x \pmod{10^k}$. В качестве решений рассматриваются вычеты по модулю 10^k.