Дискретная математика Промежуточный экзамен, краткие решения

1. Докажите или опровергните утверждение: $A \triangle B \subseteq A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

Ответ: верно.

2. Пусть отношения $R, S \subseteq A \times A$ – рефлексивны. Является ли отношение $R \circ S$ рефлексивным?

Ответ: Является. $R \circ S(x, x)$, *поскольку существует* y, *такой что* $R(x, y)$ *и* $S(y, x)$. *Достаточно взять* $y = x$.

3. Найдите количество инъективных отображений 5-элементного множества в себя. Ответом должно быть число.

Ответ: $5! = 120$.

4. Рассмотрим бесконечные последовательности из 0, 1 и 2, в которых никакая цифра не встречается два раза подряд. Какова мощность множества таких последовательностей?

Мощность этого множества – континуум. Инъекция из множества последовательностей плюс минус единиц: последовательности плюс минус единиц $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *соответствует последовательность* $0, 0 + a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_n + a_{n+1}, \ldots$ *(все по модулю 3). Обратная инъекция строится аналогично, нужно лишь дополнительно закодировать первый символ троичной последовательности.*

5. Пусть $A = \{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \geq k\}$ и $B = \{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \leq k\}$. Рассмотрим лексикографический порядок на каждом из этих множеств: пара (n_1, k_1) меньше пары (n_2, k_2), если $n_1 < n_2$ или $n_1 = n_2$ и $k_1 < k_2$. Изоморфны ли эти два упорядоченных множества?

Ответ: не изоморфны. В множестве A *у всякого элемента есть непосредственный предыдущий, а в множестве* B *у элемента* $(1, 1)$ *непосредственно предыдущего нет (*0 *– натуральный).*

6. Рассмотрим булев куб размерности n. Какой максимальный размер независимого множества в этом графе?

Ответ: 2^{n-1}. *Пример – множество строк с четным числом единиц (или с нечетным). Больше нельзя потому что можно разбить все вершины куба на пары по последней координате. Из каждой пары в независимое множество можно взять только одну вершину.*

7. Рассмотрим полное двоичное дерево глубины n (то есть с 2^n листьями). Рассмотрим следующий процесс покраски вершин. Изначально покрашен только корень дерева. На каждом шаге, каждая непокрашенная вершина, соседняя с какой-то уже покрашенной, красится с вероятностью $1/2$ (независимо от других вершин). Найдите математическое ожидание числа покрашенных листьев после $2n - 1$ шагов.

Ответ: 2^{n-1}. *Матожидание равно сумме вероятностей по всем листьям, что этот лист будет покрашен. Лист будет покрашен, тогда и только тогда, когда среди* $2n - 1$ *выборов на пути из корня в этот лист выбор "покрасить" произойдет не меньше* n *раз. Вероятность этого ровно* $1/2$.

8. Пусть в графе на $2n + 1$ вершине для всякого подмножества S из n вершин есть еще одна вершина, соединенная со всеми вершинами из S. Докажите, что в графе есть вершина, соединенная со всеми остальными вершинами.

Сначала по индукции для каждого $k = 1, \ldots, n+1$ *доказываем, что в графе есть клика размера* k. *База очевидна, для шага рассматриваем клику размера* $k - 1$, *дополняем ее множество вершин произвольными до* n *вершин и пользуемся условием задачи. Вершину, существующую по этому условию, можно добавить к клике. Таким образом, в графе есть клика размера* $n + 1$. *Рассматриваем оставшиеся* n *вершин и пользуемся условием задачи. Найденная по этому условию вершина и будет искомой.*