Дискретная математика. Пилотный поток **Промежуточный экзамен, 22.12.15**

Время экзамена: 2 часа 40 минут. Все ответы и утверждения должны быть строго обоснованы. При использовании утверждений из курса их необходимо указывать явно.

1. Про множества A, B, C известно, что $A \cap B \subseteq C \setminus (A \cup B)$. Верно ли, что тогда $A \subseteq A \triangle B$? ($\triangle$ обозначает симметрическую разность множеств.)

2. Найдите количество сюръективных функций $f\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$, которые удовлетворяют следующему свойству: если $x_1 \leq x_2$, то $f(x_1) \leq f(x_2)$. (Напоминание: по нашим соглашениям сюръекция всюду определена.)

3. Рёбра неориентированного графа G можно разбить на два непересекающихся множества так, что каждое из этих множеств рёбер образует граф без циклов нечётной длины на множестве вершин исходного графа G. Верно ли, что вершины графа G можно правильно раскрасить в 4 цвета?

4. Рассмотрим произвольное отношение строгого частичного порядка на некотором множестве A. Рассмотрим композицию этого отношения с самим собой. Будет ли это новое отношение отношением строгого частичного порядка?

5. Подмножества S_1, S_2, $\ldots$, S_{11} конечного множества U разделяют все его элементы: для любых $v \neq w$ из U найдется такое множество S_j, что либо $v \in S_j$, $w \notin S_j$; либо $v \notin S_j$, $w \in S_j$.

Может ли так случиться, что множество U содержит 2015 элементов?

6. Вероятностное пространство: упорядоченные пары (u, v) вершин 23-мерного булева куба. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «длина любого пути с началом u и концом v не меньше 20». Ответ должен быть числом.

7. Рассмотрим такое множество X упорядоченных пар (a, b) бесконечных последовательностей натуральных чисел, что для любой пары $(a, b) \in X$ выполняется $a < b$ в лексикографическом порядке и для любых двух пар $(a, b) \in X$ и $(c, d) \in X$ выполняется либо $b \leq c$, либо $a \geq d$ (также в лексикографическом порядке). Может ли множество X быть континуальным?

8. Среди 30 студентов каждый имеет ровно трех друзей (понятие “быть другом” симметрично). Студенты строго упорядочены по рейтингу (студентов с равным рейтингом нет). Будем говорить, что студент учится лучше своих друзей, если он по рейтингу выше хотя бы двух из своих друзей. Какое максимальное значение может принимать число студентов, которые учатся лучше своих друзей?

Группа	ФИО

1	2	3	4	5	6	7	8