Дискретная математика. Пилотный поток **Промежуточный экзамен, 24.12.16**

Время экзамена: 2 часа 40 минут. Все ответы и утверждения должны быть строго обоснованы. При использовании утверждений из курса их необходимо указывать явно.

1. Пусть A — некоторое множество и $f\colon A \to A$ — всюду определенная функция на нем. Верно ли, что если $f(A) \neq A$, то f не является инъекцией? Если верно, то докажите это; если неверно, приведите контрпример.

2. Сколькими способами можно переставить числа $1, \dots, 7$ так, что существует только один "локальный максимум", т.е. только одно из чисел больше своих соседей (сосед один, если число с краю, и соседей два в противном случае). Ответ в задаче должен быть дан в виде числа в десятичной записи.

3. Случайно, независимо и равновероятно выбираются две последовательности $a = (a_1, \dots, a_{100})$ и $b = (b_1, \dots, b_{100})$ из нулей и единиц. Найдите математическое ожидание числа позиций, в которых эти последовательности различаются.

4. Существуют ли такие множество A и отношение $R \subseteq A \times A$, что $R \circ R = \emptyset$, а $R \circ (R \circ R) \neq \emptyset$?

5. Какова мощность множества A таких бесконечных последовательностей из нулей и единиц $a_1, a_2, a_3, \dots$, что для всякого $i \geq 3$ верно хотя бы одно из трех: $a_i = a_{i-1} \wedge a_{i-2}$, $a_i = a_{i-1} \vee a_{i-2}$ и $a_i = a_{i-1} \oplus a_{i-2}$?

6. Приведите пример такого вероятностного пространства и событий A, B, C в нём, что любые два события из трёх образуют пару независимых событий, но

$$\Pr[A \cap B \cap C] \neq \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C].$$

7. Рассмотрим единичный квадрат $[0,1]^2$ с покоординатным частичным порядком ($(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$, если $x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$) и единичный куб $[0,1]^3$ с покоординатным частичным порядком. Изоморфны ли эти упорядоченные множества?

8. На ребрах простого неориентированного графа расставлены числа $+1$ и -1 (на каждом ребре ровно одно число). Знаком цикла называется произведение чисел, написанных на входящих в него ребрах. Докажите, что для любого связного графа, не являющегося деревом, можно расставить знаки на ребрах так, чтобы сумма знаков всех его простых циклов была отрицательна.

Группа	ФИО

1	2	3	4	5	6	7	8