Дискретная математика. Пилотный поток **Итоговый экзамен, 28.03.17**

Время экзамена: 2 часа 40 минут. Все ответы и утверждения должны быть строго обоснованы. При использовании утверждений из курса их необходимо указывать явно.

1. Приведите пример вероятностного пространства U и событий A и B, таких что $\Pr[A] > 0$, $\Pr[B] > 0$, $\Pr[A \mid B] = \Pr[B \mid A]$, но $\Pr[A] \neq \Pr[B]$. Все требуемые равенства и неравенства для построенного примера должны быть обоснованы.

2. Существуют ли невычислимые всюду определенные функции $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такие что функция $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ для всех $x \in \mathbb{N}$ вычислима? В этой задаче вычислимость и невычислимость можно обосновывать неформально, не обязательно проводить рассуждения с машинами Тьюринга.

3. Есть полоска бумаги из 2017 клеток. Два игрока по очереди закрашивают часть клеток: на каждом ходу игрок должен закрасить три подряд стоящие клетки (уже закрашенные клетки повторно закрашивать нельзя). Кто не может сделать ход — проиграл. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

4. Рассмотрим булевы схемы от переменных $x_1, \ldots, x_{10}$ с одним выходом, использующие одну операцию конъюнкции (от двух переменных) и произвольное количество операций взятия отрицания. Сколько различных функций от переменных $x_1, \ldots, x_{10}$ можно вычислить такими схемами? Функции, которые можно получить друг из друга переименованием переменных считаются разными. Например, $x_1 \wedge x_2$ и $x_3 \wedge x_4$ – разные функции от переменных $x_1, \ldots, x_{10}$. Ответом в задаче должно быть число в десятичной записи.

5. Обозначим через $\mathbb{R}_+$ множество положительных действительных чисел, а через $\mathbb{R}_-$ — множество отрицательных действительных чисел. Изоморфны ли следующие порядки: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ с покоординатным порядком и $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$ с покоординатным порядком?

6. Докажите, что в полном графе на $2n$ вершинах существует n остовных деревьев, таких, что каждое ребро графа входит только в одно дерево.

7. В системе односторонних правил подстановки в алфавите $\{a, b\}$ всякое правило имеет вид $a^k b \to b a^l$, где k и l положительны, а a^k обозначает последовательность из букв a длины k. При этом числа k и l для разных правил могут быть разными. Разрешима ли задача проверки достижимости для графа, заданного конечным множеством таких правил подстановки? В этой задаче разрешимость и неразрешимость можно обосновывать неформально, не обязательно проводить рассуждения с машинами Тьюринга.

8. Пусть $p > 2$ — простое. Докажите, что для любого простого делителя q числа $2^p - 1$ выполняется $q \equiv 1 \pmod{p}$.

Группа	ФИО

1	2	3	4	5	6	7	8