Дискретная математика, пилотный поток. **Решения задач экзамена 22.12.15**

1. Про множества A, B, C известно, что $A \cap B \subseteq C \setminus (A \cup B)$. Верно ли, что тогда $A \subseteq A \triangle B$? ($\triangle$ обозначает симметрическую разность множеств.)

Решение. *Ответ*: верно.

Пусть $x \in A$. Тогда из определений теоретико-множественных операций получаем, что $x \in A \cup B$, а значит $x \notin C \setminus (A \cup B)$. Поскольку $A \cap B \subseteq C \setminus (A \cup B)$, то $x \notin A \cap B$, что означает $x \notin B$.

Поэтому $x \in A \setminus B \subseteq A \triangle B$.

2. Найдите количество сюръективных функций $f\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, которые удовлетворяют следующему свойству: если $x_1 \leq x_2$, то $f(x_1) \leq f(x_2)$. (Напоминание: по нашим соглашениям сюръекция всюду определена.)

Решение. *Ответ*: 1.

В курсе было доказано, что сюръекция конечного множества на себя является инъекцией (и, тем самым, биекцией). Таким образом, требуется найти количество биекций, то есть перестановок, удовлетворяющих указанному свойству монотонности.

Тождественная перестановка $\mathrm{id}(i) = i$ удовлетворяет свойству монотонности.

Докажем, что других нет. Так как перестановка — инъекция, монотонная перестановка f обязана быть строго возрастающей: из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$.

Докажем индукцией по k, что в строго возрастающей перестановке выполняются равенства $f(i) = i$ для $i = 1, \dots, k$.

База индукции: пусть $f(1) \neq 1$, т.е. $f(1) > 1$. Для какого-то $j > 1$ в силу сюръективности f выполняется $f(j) = 1 < f(1)$. Приходим к противоречию с монотонностью.

Индуктивный переход. Пусть $f(i) = i$ для $i = 1, \dots, k$. Предположим, что $f(k+1) \neq k+1$. Если $f(k+1) = i < k+1$ для некоторого i, приходим к противоречию с инъективностью: $f(k+1) = i = f(i)$, где в последнем равенстве используется предположение индукции.

Если $f(k+1) > k+1$, рассмотрим $j > k+1$, для которого $f(j) = k+1$. Приходим к противоречию с монотонностью.

3. Рёбра неориентированного графа G можно разбить на два непересекающихся множества так, что каждое из этих множеств рёбер образует граф без циклов нечётной длины на множестве вершин исходного графа G. Верно ли, что вершины графа G можно правильно раскрасить в 4 цвета?

Решение. *Ответ*: верно.

В курсе было доказано, что граф без нечетных циклов можно правильно раскрасить в 2 цвета. Пусть $E = E_1 \cup E_2$ — указанное в условии задачи разбиение рёбер, а G_1, G_2 — соответствующие графы.

Обозначим цвета цифрами 0 и 1. Раскраска – это отображение всех вершин в множество цветов $\{0, 1\}$. Обозначим правильные раскраски графов G_i через $c_i\colon V(G_i) \to \{0, 1\}$.

Докажем, что тогда $c(v) = (c_1(v), c_2(v))$ — правильная раскраска исходного графа в 4 цвета, а именно, $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

Рассмотрим ребро $\{u, v\}$ графа G. Оно принадлежит одному из множеств E_i. Поэтому $c_i(u) \neq c_i(v)$, откуда следует, что и $c(u) \neq c(v)$.

4. Рассмотрим произвольное отношение строгого частичного порядка на некотором множестве A. Рассмотрим композицию этого отношения с самим собой. Будет ли это новое отношение отношением строгого частичного порядка?

Решение. *Ответ*: да.

Обозначим изначальное отношение строгого частичного порядка через R, а его композицию с самим собой через $Q = R \circ R$. Чтобы проверить, будет ли новое отношение Q отношением строгого частичного порядка нужно проверить, что оно является антирефлексивным и транзитивным.

Антирефлексивность. Предположим противное, пусть для некоторого $a \in A$ верно $Q(a, a)$. По определению композиции это означает, что существует $b \in A$, такой что $R(a, b)$ и $R(b, a)$. По транзитивности отношения R получаем $R(a, a)$, что противоречит антирефлексивности R.

Транзитивность. Пусть для некоторых $a, b, c \in A$ верно $Q(a, b)$ и $Q(b, c)$. Тогда по определению композиции существуют $x, y \in A$, такие что верно $R(a, x)$, $R(x, b)$, $R(b, y)$ и $R(y, c)$. Тогда по транзитивности R верно $R(a, b)$ и $R(b, c)$. Тогда по определению композиции $Q(a, c)$. Транзитивность доказана.

5. Подмножества $S_1, S_2, \ldots, S_{11}$ конечного множества U разделяют все его элементы: для любых $v \neq w$ из U найдется такое множество S_j, что либо $v \in S_j$, $w \notin S_j$; либо $v \notin S_j$, $w \in S_j$.

Может ли так случиться, что множество U содержит 2015 элементов?

Решение. *Ответ*: может.

Решим сначала задачу для большего множества W. Пусть W — множество двоичных строк длины 11, в нём $2^{11} = 2048$ элементов. Через S_k обозначим множество тех строк, в которых на k-й позиции стоит 1. Семейство $\{S_k,\ k = 1, \ldots, 11\}$ разделяет все элементы W. Действительно, для любых двух различных строк, найдётся позиция j, в которой в одной строке стоит 0, а в другой — 1. Поэтому одна строка входит в S_j, а другая — нет. (По существу в качестве множеств S_k мы рассмотрели гиперграни булева куба.)

Теперь возьмём любое подмножество U множества W, содержащее 2015 элементов и заметим, что для него также условие задачи выполняется (только вместо множеств S_k нужно брать $S_k \cap U$).

6. Вероятностное пространство: упорядоченные пары (u, v) вершин 23-мерного булева куба. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «длина любого пути с началом u и концом v не меньше 20». Ответ должен быть числом.

Решение. *Ответ*: $2^{-12} = 1/4096$.

Если слова u, v, отвечающие вершинам булева куба, различаются в h позициях, длина кратчайшего пути с началом u и концом v равна h. Действительно, рёбра булева куба соединяют слова, различающиеся ровно в одной позиции. Поэтому за один переход по ребру количество различающихся позиций уменьшается не более чем на 1. С другой стороны, переход по ребру, соответствующему различающей позиции, уменьшает количество различающих позиций.

Обозначим искомое событие через A, а через E_u обозначим событие «первая вершина в паре равна u». Посчитаем условную вероятность $\Pr[A \mid E_u]$.

Вершины u, v различаются в ≥ 20 позициях тогда и только тогда, когда они совпадают в ≤ 3 позициях. Для каждого k есть ровно $\binom{23}{k}$ слов v, совпадающих с u в k позициях. Поэтому

$$\Pr[A \mid E_u] = \frac{\binom{23}{0} + \binom{23}{1} + \binom{23}{2} + \binom{23}{3}}{2^{23}} = \frac{1 + 89 \cdot 23}{2^{23}} = \frac{2^{11}}{2^{23}}.$$

С другой стороны, вероятности всех событий E_u одинаковы. Поэтому по формуле полной вероятности получаем, что $\Pr[A] = \Pr[A \mid E_u] = 2^{-12}$.

7. Рассмотрим такое множество X упорядоченных пар (a, b) бесконечных последовательностей натуральных чисел, что для любой пары $(a, b) \in X$ выполняется $a < b$ в лексикографическом порядке и для любых двух пар $(a, b) \in X$ и $(c, d) \in X$ выполняется либо $b \leq c$, либо $a \geq d$ (также в лексикографическом порядке). Может ли множество X быть континуальным?

Решение. *Ответ*: не может.

Докажем, что множество X конечно или счетно. Для этого построим его инъекцию в множество конечных последовательностей натуральных чисел. Это означает, что есть биекция X в некоторое подмножество конечных последовательностей натуральных чисел. В лекциях было доказано, что множество этих последовательностей счетно, а значит его подмножество конечно или счетно.

Для построения инъекции рассмотрим произвольную пару (a, b) из X. И a, и b являются бесконечными последовательностями натуральных чисел, обозначим элементы в этих последовательностях через $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ соответственно. Поскольку $a < b$ в лексикографическом порядке, то существует некоторое k, такое что $a_i = b_i$ для всех $i < k$ и $a_k < b_k$. Поставим в соответствие паре (a, b) конечную последовательность $a_1, \ldots a_k, a_{k+1} + 1$. Обозначим эту последовательность $x_{a,b}$. Тогда нетрудно видеть, что $a < x_{a,b} < b$ (в курсе определялось понятие лексикографического порядка на множестве произвольных конечных последовательностей; оно буквально переносится на множество произвольных конечных или бесконечных последовательностей) Мы утверждаем, что отображение $(a, b) \mapsto x_{a,b}$ является инъекцией. Чтобы доказать это, рассмотрим другую пару (c, d) из X. Тогда по условию либо $b \leq c$, либо $a \geq d$. В первом случае по транзитивности $x_{a,b} < x_{c,d}$, во втором – $x_{a,b} > x_{c,d}$.

8. Среди 30 студентов каждый имеет ровно трех друзей (понятие "быть другом" симметрично). Студенты строго упорядочены по рейтингу (студентов с равным рейтингом нет). Будем говорить, что студент учится лучше своих друзей, если он по рейтингу выше хотя бы двух из своих друзей. Какое максимальное значение может принимать число студентов, которые учатся лучше своих друзей?

Решение. *Ответ*: 22.

Покажем сначала, почему больше 22 студентов, которые учатся лучше своих друзей, быть не может. Рассмотрим ориентированный граф, вершинами которого являются студенты, ребрами соединены друзья, и ребро идет от студента, учащегося хуже, к студенту, учащегося лучше. Тогда в графе 30 вершин и степень каждой вершины равна трем. Как было показано в лекциях, количество ребер тогда равно $30 \cdot 3/2 = 45$. При этом, в вершину, соответствующую студенту, учащемуся лучше своих друзей, входит хотя бы два ребра. Так что, если хорошо учащихся студентов k, то в k соответствующих им вершин входит $2k$ ребер. Поскольку всего ребер 45, получаем, что k не больше 22.

Построим теперь пример, когда число студентов, учащихся лучше своих друзей, равно 22. Упорядочим студентов по рейтингу: $v_1, \ldots, v_{30}$, то есть студент v_1 является первым в рейтинге, а студент v_30 – последним. Пусть студент v_1 дружит с тремя следующими по рейтингу студентами v_2, v_3, v_4. Для каждого из студентов v_2, v_3, v_4 в качестве еще двух друзей выберем отдельную пару студентов, следующих по рейтингу. Тогда студент v_2 дружит с v_5, v_6, студент v_3 дружит с v_7, v_8, студент v_9, v_{10}. Далее разобьем студентов $v_{11}, \ldots, v_{22}$ на 6 пар и скажем, что студенты первой пары оба дружат с v_5, студенты второй – с v_6, и так далее до v_10. Наконец, студентов $v_{11}, \ldots, v_{22}$ разобъем на четыре тройки. Каждой такой тройке сопоставим пару оставшихся студентов (осталось как раз восемь студентов). Скажем, что каждый студент из тройки дружит с каждым студентом из соответствующей пары.

По другому на процесс построения этого графа можно смотреть так. Расположим студентов в виде корневого дерева. В корень поместим студента v_1. Из корня выходит три ребра. В новые вершины помещаем следующих по рейтингу студентов. Дальше из каждой вершины проводим два дополнительных ребра. Строим полное такое дерево глубины 3. В нем будет как раз 22 вершины. Теперь листья этого дерева (их 12) соединяем с оставшимися восемью вершинами.

Из построения нетрудно видеть, что каждый студент дружит ровно с тремя. При этом 22 первых по рейтингу студента учатся лучше своих друзей.