

Неделя 2. Перечислительная комбинаторика

1. 4 человека должны унести 9 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый способен унести любое количество имеющихся предметов?
2. 4 человека должны взять по одному предмету из имеющихся 9 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать?
3. 2 человека равновероятно и случайно делят 8 различных предметов. Какова вероятность того, что каждому достанется 4 предмета?
4. Сколько есть 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?
5. Восемь человек равновероятно и случайно выстраиваются в очередь. Какова вероятность того, что Иванов, Петров и Сидоров стоят рядом?
6. Сколько имеется 4-значных чисел, у которых каждая следующая (слева направо) цифра больше предыдущей?
7. Сколькими способами можно образовать 6 пар из 12 человек?
8. Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по монете?
9. Среди чисел от 1 до 15 равновероятно и случайно выбирается 6 различных чисел. Какова вероятность того, что среди них нет двух, отличающихся на единицу?
10. Докажите равенства (предпочтительнее комбинаторное доказательство)
 - а) $\sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = n2^{n-1}$;
 - б) $\sum_{k=0}^n \binom{d+k}{d} = \binom{d+1+n}{d+1}$.
11. Докажите, что число последовательностей из нулей и единиц длины n , в которых не встречается двух нулей подряд равно $(n+1)$ -ому числу Фибоначчи F_n , где $F_0 = F_1 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.
12. Докажите, что количество способов разбить прямоугольник $n \times 2$ на прямоугольники размера 1×2 равно F_n .
13. *Разложением* числа n называется такая последовательность положительных целых чисел x_1, x_2, \dots, x_k , что $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$. Найдите количество разложений n на нечетные слагаемые.
14. *Разбиением* числа N на k частей называется такая невозрастающая последовательность положительных целых чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = N$. Чего больше, разбиений числа N на не более чем k слагаемых, или разбиений числа $N+k$ на ровно k слагаемых?
15. Чего больше, разбиений N на слагаемые, не превосходящие k , или разбиений N на не более чем k слагаемых?
16. Чего больше, разбиений n на различные слагаемые или на нечетные слагаемые?
17. Сколькими способами можно разрезать правильный n -угольник на треугольники, проводя диагонали?
18. Сколько есть таких последовательностей целых чисел a_1, \dots, a_n , что $a_1 = 0$ и $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$ для $1 \leq i < n$?
19. Рассмотрим клетчатый квадрат размера $n \times n$, проведем в нем диагональ из левого нижнего угла в правый верхний и выкинем все клетки, лежащие выше диагонали. Сколькими различными способами можно разбить оставшуюся фигуру на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?
20. Пусть $0 < l \leq k \leq n$. Рассмотрим числа $1, \dots, n$. Обозначим через A размер минимального семейства таких подмножеств множества чисел $1, \dots, n$, что каждое подмножество в семействе имеет размер l , и что любое подмножество чисел $1, \dots, n$ размера k целиком содержит хотя бы одно множество семейства. Докажите, что

$$A \geq \frac{\binom{n}{l}}{\binom{n}{k}}.$$

Домашнее задание 2

1. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные — в порядке убывания?
2. Из 36-карточной колоды карт на стол равномерно и случайно выкладывается последовательность из 4 карт. Какова вероятность того, что две из них красные, а две черные?
3. Сколько существует 7-значных чисел, в которых ровно две четные цифры и перед каждой четной цифрой обязательно стоит нечетная?
4. Студсовет из 8 человек выбирает из своего состава председателя путем тайного голосования. Каждый может отдать один голос за любого члена студсовета. Результат голосования — число голосов, отданных за каждого кандидата. Сколько существует различных результатов голосования?
5. На Новом Году в детском саду 9 детей равномерно и случайно разбиваются на 3 группы для хороводов вокруг трех различных елок. Если в каком-то хороводе оказывается не более 2 человек, то хоровод не получается. Какова вероятность того, что вокруг хотя бы одной елки хоровод не получится?
6. Для всех $n \geq 0$ докажите равенство $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots = F_n$. Более строго равенство записывается в следующем виде:

$$\sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n-k}{k} = F_n.$$

7. Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечетных чисел?
8. На доске размера 100×100 ведется игра шахматного типа. В игре участвуют 20 фигур, каждая из которых ходит и бьет другие фигуры по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого поля бьет не более 20 полей. Больше о правилах не известно ничего, в частности, множество битых фигурой полей может неизвестным нам образом зависеть от поля расположения фигуры. Докажите, что все 20 фигур можно расставить на доске так, чтобы ни одна фигура не била другую.