Дискретная математика **Пилотный поток**

Неделя 4. Отношения и функции

1. Будем говорить, что одна прямоугольная коробка «меньше» другой, если одно из трёх измерений первой коробки меньше одного из трёх измерений второй (если их можно поставить на пол так, чтобы первая коробка была ниже второй). Будет ли это отношение транзитивным?

2. Сравните множества:

а) $(\cup_{i\in I}A_i)\times(\cup_{j\in J}B_j)$ и $\cup_{i\in I,j\in J}\,(A_i\times B_j)$; **б)** $(\cap_{i\in I}A_i)\times(\cap_{j\in J}B_j)$ и $\cap_{i\in I,j\in J}\,(A_i\times B_j)$.

3. Найдите $R\circ R$, где $R(x,y)$ — бинарное отношение на множестве $\mathbb{R}$, означающее, что

а) $y=x+1$; **б)** $x+y=1$.

4. Является ли композиция отношений эквивалентности отношением эквивалентности?

5. Функция f определена на множестве X и принимает значения в множестве Y, при этом $B\subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение

$$f(f^{-1}(B))\ ?\ B$$

стало верным?

6. Пусть A и B — два непустых множества. Покажите равносильность свойств «существует функция $f\colon A\to B$, являющая инъекцией» и «существует функция $f\colon B\to A$, являющаяся сюръекцией».

7. Чего больше: инъективных отображений 5-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 5-элементное?

8. Пусть существуют инъекция $f\colon A\to B$ и сюръекция $g\colon A\to B$. Докажите, что тогда существует биекция $h\colon A\to B$.

9. Найдите количество невозрастающих инъекций $f\colon\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,m\}$.

Функция f называется невозрастающей, если $x\leqslant y$ влечет $f(x)\geqslant f(y)$.

10. Говорят, что $g\colon B\to A$ является *левой обратной* (соответственно *правой обратной*) к f, если $g\circ f=\mathrm{id}_A$ (соответственно $f\circ g=\mathrm{id}_B$).

а) Приведите примеры, когда левая обратная не является правой обратной и когда правая обратная не является левой. **б)** Может ли такое случиться для конечных множеств? **в)** Может ли быть так, что у одной функции есть и левая, и правая обратные, но они различны? **г)** Для каких функций существует левая обратная? **д)** Для каких функций существует правая обратная?

11. Докажите, что всякое отношение $R\subseteq A\times B$ на конечных множествах является композицией $U\circ f_R$ некоторой функции f_R, зависящей от R, и отношения U, которое зависит только от множеств A и B.

12*. а) На сфере отмечено 5 точек, никакие три из которых не лежат на большой окружности (большая окружность это окружность, по которой пересекаются сфера и плоскость, проходящая через её центр). Две большие окружности, не проходящие через отмеченные точки, называются эквивалентными, если одну из них с помощью непрерывного перемещения по сфере можно перевести в другую так, что в процессе перемещения окружность не проходит через отмеченные точки.

Сколько можно нарисовать окружностей, не проходящих через отмеченные точки и не эквивалентных друг другу?

б) Та же задача для n отмеченных точек.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 4

1. Рассмотрим на множестве $\mathbb{R}$ бинарное отношение $R(x, y)$, означающее, что $\frac{x}{y} > 0$. Чему равно $R \circ R$?

2. Докажите, что $(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2) \subseteq (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2)$. При каких условиях на A_1, A_2, B_1, B_2 получается равенство?

3. В ходе турнира каждая команда сыграла с каждой по одному разу, причём ничьих не было и каждая команда хоть кому-то да проиграла. Докажите, что найдутся три команды А, Б, В, нарушившие транзитивность: А выиграла у Б, Б выиграла у В, а В выиграла у А.

4. Функция f определена на множестве $A \cup B$ и принимает значения в множестве Y. Какие из знаков включения $\subseteq$ и $\supseteq$ можно поставить вместо ?, чтобы утверждение

$$f(A \triangle B) \,?\, f(A) \triangle f(B)$$

стало верным?

5. Функция f определена на множестве X и принимает значения в множестве Y, при этом $A \cup B \subseteq Y$. Какие из знаков включения $\subseteq$ и $\supseteq$ можно поставить вместо ?, чтобы утверждение

$$f^{-1}(A \triangle B) \,?\, f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$$

стало верным?

6. Найдите количество невозрастающих функций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$. Функция невозрастающая, если $x \leqslant y$ влечет $f(x) \geqslant f(y)$.

7. Докажите, что существует биекция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая что $f(f(n))$ переводит четные числа в нечетные, а нечетные в четные.

8*. Докажите, что существует функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая что для всякого $n \in \mathbb{N}$

$$f(f(n)) = n^2.$$

(Эта задача не учитывается в оценке за домашнее задание и ее не нужно сдавать в письменном виде.)