

Неделя 5. Мощность множеств-1

1. Пусть множества A и B равномощны. Докажите, что множества $A \times A$ и $B \times B$ также равномощны.
2. Докажите, что множество простых чисел счетно.
3. Докажите, что множество конечных подмножеств рациональных чисел счетно.
4. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством бесконечных последовательностей из 0 и 1 и множеством бесконечных последовательностей из **а)** 0, 1, 2, 3; **б)** 0, 1, 2.
5. Пусть множество A конечно, а множество B счетно. Докажите, что множество функций $f: A \rightarrow B$ счетно.
6. Функция называется периодической, если для некоторого числа T и любого x выполняется $f(x+T) = f(x)$. Докажите, что множество периодических функций $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ счетно.
7. Говорят, что $g: B \rightarrow A$ является *левой обратной* (соответственно *правой обратной*) к f , если $g \circ f = \text{id}_A$ (соответственно $f \circ g = \text{id}_B$).
а) Приведите примеры, когда левая обратная не является правой обратной и когда правая обратная не является левой. **б)** Может ли такое случиться для конечных множеств? **в)** Может ли быть так, что у одной функции есть и левая, и правая обратные, но они различны? **г)** Для каких функций существует левая обратная? **д)** Для каких функций существует правая обратная?
8. Установите взаимно однозначное соответствие между отрезком $[0, 1]$ и интервалом $(0, 1)$.
9. Пусть A бесконечно, а B счетно. Верно ли, что множество $A \cup B$ равномощно множеству A ?
10. Установите взаимно однозначное соответствие между интервалом (a, b) и $(a, b) \cup \mathbb{Z}$.
11. Установите взаимно однозначное соответствие между окружностью радиуса 1 и окружностью радиуса $R > 0$.
12. Установите взаимно однозначное соответствие между окружностью единичного радиуса и множеством действительных чисел \mathbb{R} .
13. Установите взаимно однозначное соответствие между интервалом $(0, 1)$ и действительной прямой $(-\infty, +\infty)$.
14. Установите взаимно однозначное соответствие между полупрямой $(0, +\infty)$ и прямой $(-\infty, +\infty)$.
Множество A будем называть конечным, если для некоторого натурального n есть биекция из A в $\{1, \dots, n\}$. При этом n называется мощностью A .
15. Докажите, что если $A \sim \{1, \dots, n\}$ и $A \sim \{1, \dots, k\}$, то $k = n$ (определение мощности конечных множеств корректно).
16. Докажите, что если A конечно и $B \subseteq A$, то
а) B конечно;
б) $|B| \leq |A|$;
в) $|B| = |A| \Leftrightarrow B = A$;
г) $|B| < |A| \Leftrightarrow B \subsetneq A$.
17. Докажите, что только бесконечное множество может быть равномощно собственному подмножеству.
18. Докажите, что любое подмножество счетного множества конечно или счетно.
19. Докажите, что функция $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, которая задана правилами $f(2k) = 0$, $f(2k + 1) = 1$, не представляется в виде суммы двух биекций.
20. Разбейте единичный круг (с границей) на непересекающиеся отрезки ненулевой длины.

Домашнее задание 5

1. Верно ли, что если $A \setminus B$ бесконечно, а B счетно, то $A \setminus B$ равномощно A ?
2. Верно ли, что если A бесконечно, а B счетно, то $A \Delta B$ равномощно A ?
3. Установите взаимнооднозначное соответствие между окружностью и квадратом (без внутренней).
4. Установите взаимнооднозначное соответствие между кругом без границы и кругом с границей.
5. Действительное число называется алгебраическим, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что множество алгебраических чисел счетно.
6. Докажите, что любое множество непересекающихся отрезков на прямой конечно или счётно.
7. Докажите, что всякое бесконечное множество содержит бесконечное число непересекающихся счетных подмножеств.
8. Докажите, что для всякой функции $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ существуют три биекции $g_1, g_2, g_3: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, такие что для всякого целого x верно $f(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$.