Неделя 8. Порядки-2

1. Докажите, что в упорядоченном множестве с $mn+1$ элементами есть либо цепь размера $n+1$, либо антицепь размера $m+1$ (либо и то, и другое).

2. Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых трёх из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.

3. Докажите, что из любой последовательности из 36 различных чисел можно выбрать либо возрастающую подпоследовательность из 8 чисел, либо убывающую подпоследовательность из 6 различных чисел (либо и то, и другое).

4. Из всякой ли последовательности из 35 различных чисел можно выбрать либо возрастающую подпоследовательность из 8 чисел, либо убывающую подпоследовательность из 6 различных чисел (либо и то, и другое)?

5. Пусть A — фундированное линейно упорядоченное множество. Пусть $f\colon A \to A$ возрастающая функция, то есть если $x < y$, то $f(x) < f(y)$. Докажите, что $f(x) \geqslant x$ для всех $x \in A$.

6. Имеется конечная последовательность нулей и единиц. За один шаг разрешается любую группу 01 заменить на $10\ldots0$ (произвольное количество нулей). Докажите, что такие шаги нельзя выполнить бесконечное количество раз.

7. (Теорема Холла) Пусть даны множества $S_1, \ldots, S_n$, причем, для любого $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ выполняется $|\cup_{i\in I} S_i| \geqslant |I|$. Тогда существуют попарно различные $a_1, \ldots, a_n$, такие что $a_1 \in S_1, \ldots, a_n \in S_n$. Выведите это из теоремы Дилуорса.

8. Докажите, что любые два счетных плотных линейных порядка без минимального и максимального элемента изоморфны.

Пусть в частично-упорядоченном множестве A для всякого $s \in A$ верно, что множество $\{x \in A \mid x \leqslant s\}$ конечно. Определим *функцию Мебиуса* следующим рекуррентным правилом:

$$
\begin{aligned}
&\mu(s,s) = 1, \text{ для всех } s \in A;\\
&\mu(s,u) = -\sum_{s\leqslant t<u} \mu(s,t), \text{ для всех } s < u \text{ в } A.
\end{aligned}
$$

9. (Формула обращения Мебиуса) Пусть даны функции $f, g\colon A \to \mathbb{R}$. Тогда

$$g(t) = \sum_{s\leqslant t} f(s) \text{ для всякого } t \in A$$

тогда и только тогда, когда

$$f(t) = \sum_{s\leqslant t} g(s)\mu(s,t) \text{ для всякого } t \in A.$$

10. Докажите, что формула включений-исключений является частным случаем формулы обращения Мебиуса.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 8

1. Каков максимально возможный размер антицепи в упорядоченном множестве на n элементах, в котором максимальная цепь имеет размер k?

2. Докажите, что в любом бесконечном упорядоченном множестве есть либо бесконечная цепь, либо бесконечная антицепь (либо и то, и другое).

3. На декартовой плоскости задано 16 попарно не параллельных прямых, также не параллельных оси Ox. Докажите, что среди них можно выбрать либо 5 прямых, попарно пересекающихся в верхней полуплоскости относительно оси Ox, либо 3 прямых, попарно пересекающихся в нижней полуплоскости (либо и то, и другое).

4. Пусть A — фундированное множество. Пусть $f\colon A \to A$ возрастающая функция, то есть если $x < y$, то $f(x) < f(y)$. Верно ли, что $f(x) \geqslant x$ для всех $x \in A$?

5. Пусть A — фундированное множество. Пусть $f\colon A \to A$ возрастающая функция, то есть если $x < y$, то $f(x) < f(y)$. Верно ли, что $f(x) \geqslant x$ для всех $x \in A$, для которых x и $f(x)$ сравнимы?

6. Пусть на прямой задана произвольная конечная система отрезков. Обозначим через n наименьшее количество точек на прямой таких, что каждый из отрезков системы содержит одну из этих точек; через k — наибольшее количество попарно непересекающихся отрезков, которые можно выбрать из данной системы. Докажите, что $n = k$.

7. Рассмотрим для произвольного k множество $\mathbb{N}^k$ с отношением покоординатного порядка. Существует ли в нем бесконечная антицепь?