

## Неделя 9. Графы-1

Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер.

1. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.
2. В графе 100 вершин и 800 рёбер.
  - а) Докажите, что в этом графе есть хотя бы одна вершина степени не меньше 16.
  - б) Может ли так случиться, что все степени этого графа имеют степень 16?
3. Докажите, что если в графе есть хотя бы две вершины, то есть две вершины одинаковой степени.
4. Докажите, что в дереве из не менее чем двух вершин всегда есть вершина степени 1.
5. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?
6. В дереве с не менее чем двумя вершинами нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т.е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.
7. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 15 граней и все грани являются треугольниками?  
*Дополнением  $\bar{G}$  графа  $G$  называется такой граф на том же множестве вершин, что и у графа  $G$ , в котором пара вершин связана ребром тогда и только тогда, когда в  $G$  эта пара вершин ребром не связана.*
8. Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).
9. В гости придут либо 5, либо 7 человек. На какое минимальное число кусков нужно порезать торт, чтобы гарантированно можно было раздать всем поровну?
10. Вершинным покрытием в графе называется подмножество вершин, содержащее хотя бы один конец каждого ребра. Придумайте алгоритм, работающий за полиномиальное время, и находящий в графе вершинное покрытие, которое по размеру превышает минимальное не более чем в два раза.

## Домашнее задание 9

1. Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?
2. В связном графе на 10 вершинах есть три вершины степени 4. Может ли этот граф быть деревом?
3. Простой путь наибольшей длины в дереве назовем *диаметром*. Найдите количество диаметров в полном бинарном дереве глубины  $n$  (расстояние от корня до листьев равно  $n$ ).
4. Куб со стороной  $n \geq 3$  разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?
5. Докажите, что при любых  $0 \leq k < n$  таких, что  $kn$  — чётное, существует граф на  $n$  вершинах, степени которого равны  $k$ .
6. В графе  $2n + 1$  вершина, степень каждой равна  $n$ . Докажите, что после удаления любого подмножества из менее чем  $n$  рёбер получается связный граф.
7. В графе на  $n$  вершинах для любой пары вершин  $u$  и  $v$  есть ровно две вершины, с которыми соединена и  $u$ , и  $v$ . Докажите, что степени всех вершин в этом графе одинаковы.