Дискретная математика. Пилотный поток **Итоговый экзамен, 30.03.18**

Время экзамена: 2 часа 40 минут. Все ответы и утверждения должны быть строго обоснованы. При использовании утверждений из курса их необходимо указывать явно.

1. Про множества A, B и C известно, что множество $(A \cup B) \setminus C$ континуально, $(A \cup C) \setminus B$ континуально, а $(B \cup C) \setminus A$ счетно. Может ли множество $B \cup C$ быть счетным? Если может, приведите пример, если не может — докажите это.

2. Неориентированный путь состоит из вершин $v_0, v_1, \ldots, v_4$. Вершины пути равновероятно и случайно красятся в 4 цвета. Найдите вероятность того, что все вершины, находящиеся на расстоянии 1 или 2, покрашены в разные цвета.

3. Пусть X и Y — конечные множества. Даны две всюдуопределенные функции $f, g \colon X \to Y$. Известно, что f является инъекцией, а g — сюръекцией. Верно ли, что для всякого $A \subseteq X$ выполняется $|g^{-1}(f(A))| \geq |A|$? Если не верно, приведите пример f, g и A, для которых неравенство не верно. Если верно — докажите это.

4. Сколько существует упорядоченных пар (x, y) остатков по модулю 11, таких что $x^2 \equiv y^2 \pmod{11}$?

5. Разрешимо ли множество описаний МТ, которые на всех входах выдают ответ, причем на всех входах один и тот же? (В этой задаче требующиеся алгоритмы можно описывать неформально, не обязательно строить машину Тьюринга.)

6. При изготовлении ожерелья используют 6 белых и 6 чёрных бусинок. Их надевают на нить в случайном порядке (все расстановки бусин на нити равновероятны), после чего концы нити завязывают и все бусины оказываются расположены по кругу. Найдите математическое ожидание числа чёрных бусин, обе соседние бусины которых белые.

7. Пусть функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислима и множество $D = \{n \mid f(n) \text{ — определена}\}$ неразрешимо. Докажите, что существует число $C \in \mathbb{N}$, такое что функция

$$g_C(n) = \begin{cases} f(n), & \text{если } f(n) \text{ определена,} \\ C, & \text{иначе,} \end{cases}$$

не вычислима. (В этой задаче требующиеся алгоритмы можно описывать неформально, не обязательно строить машину Тьюринга.)

8. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ рассмотрим булеву функцию

$$f_k(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}} x_i.$$

Постройте булеву схему размера $O(n)$, вычисляющую все функции $f_1, \ldots, f_n$ (таким образом, у схемы должно быть n выходов).

Группа	ФИО

1	2	3	4	5	6	7	8