Предисловие

Ответ на вопрос "сколько вариантов?" приходится искать очень многим — от пенсионерки, забывшей и пытающейся подобрать код в подъезде[1], до рассчитывающего вероятности риска аналитика или страхового агента. Иногда найти ответ не просто и требуется знание науки, которая и называется комбинаторикой, но в большинстве случаев хватает знания нескольких элементарных приемов и умения их сочетать и, главное, выбирать нужный.

Для овладевания этой, "элементарной" частью комбинаторики не нужен курс лекций — всю потребную теорию можно рассказать за два часа, а вот навык в решении задач совершенно необходим и достигается только тренировкой. При этом, если студенту-математику достаточно небольшого набора упражнений, который можно найти в задачниках по дискретной математике, то студенту-нематематику или интересующемуся школьнику нужно иметь под рукой значительно больше задач.

Кроме того, обычно комбинаторике посвящается 1-2 лекции и столько же семинаров в течении курса дискретной математики или теории вероятности. Студенту с поставленной в школе математической интуицией этого достаточно. Если же интуиция хромает (а таких студентов становится все больше и больше), нужны дополнительные занятия. Лучше с преподавателем, но, если это невозможно, то с задачником-самоучителем.

К сожалению, известные автору задачники с разделом "комбинаторика" рассчитаны как минимум на сильного студента технического вуза времен СССР, причем с самого начала загружены математической символикой, что вызывает у большинства студентов-младшекурсников дополнительные сложности.

Итак, первая цель книги — занять пока пустую нишу элементарного по изложению и содержанию задачника для школьников и студентов-нематематиков.

Вторая цель — собрать под одной обложкой множество красивых комбинаторных задач, растворенных в фольклоре маткружков, подборках преподавателей, книгах по дискретной математике и многих других местах вплоть до сайта anekdot.ru.

Задачник сделан в виде самоучителя — автор еще сохраняет детскую надежду, что в будущем студенты будут учить комбинаторику самостоятельно и его функции сведутся к проверке контрольных работ. Формально никаких предварительных знаний не требуется, вся необходимая теория раскидана по главам, а доказательства немногих формул разобраны при решении примеров.

Тем не менее для понимания доказательств необходимы начальные знания из те-

[1] Впрочем, она так и не решила задачи, предпочтя позвонить автору.

ории множеств (они будут небесполезны и при решении задач), а решение задач из приложений требует знакомства с бинарными отношениями, логикой и теорией вероятности.

В начале каждой из первых четырех глав решается несколько типичных задач и приводятся необходимые обозначения и теоретические сведения. Все нужные для понимания формулы и утверждения строго доказываются. Основную часть глав занимают задачи. При их решении используются методы не только текущей главы, но и предыдущих.

Первая, вторая и четвертая глава посвящены основным комбинаторным приемам — правилу суммы и произведения, перестановкам, сочетаниям и размещениям, формуле включения и исключения и задаче Муавра. Следующим шагом было бы введение производящих функций, но его читатель сделает за гранью этой книги.

Третья глава посвящена свойствам биноминальных коэффициентов, введенных главой ранее. На подобные вещи редко хватает времени в курсе дискретной математики, но тема слишком красива, чтобы про нее забыть. Конечно, эту главу можно существенно расширить и углубить, но основной принцип задачника — оставаться на элементарном уровне.

Первые два параграфа пятой главы посвящены комбинаторным моделям, возникающим в теории множеств, бинарных отношениях и, математической логике и теории графов. Для решения задач нужно знать определения. Часто именно ответы на комбинаторные вопросы часто помогают понять суть определений. Например, вопрос о числе асимметричных бинарных отношений — хороший тест на понимание, что это такое.

В следующих двух параграфах собраны комбинаторные задачи, с карточными и шахматными формулировками. Наконец, в последнем параграфе пятой главы — просто смесь интересных задач, при решении которых используются комбинаторные идеи.

Шестая глава содержит ответы к задачам и решения (или указания к решению) наиболее трудных и интересных.

* * *

Несколько общих советов по решению задач. Они тривиальны, но часто бывают полезны.

Постарайтесь четко понять, что Вас спрашивают, особенно, если дело происходит на контрольной. В комбинаторике многое зависит от нюансов формулировки, часто лингвистических.

Не пытайтесь угадать формулу, в которую надо подставить числа. Придумайте рассуждение, позволяющее получить ответ и уже тогда используйте формулы.

Обычно в комбинаторных задачах не требуется доводить до численного ответа. Даже наоборот, ответ $15!$ значительно более нагляден, чем 1307674368000.

Ответ в комбинаторной задаче почти всегда — натуральное число. Если у Вас получилось, например, $2^7/7$, ищите ошибку.

Проверяйте ответ на разумность. Если Ваша интуиция говорит, что вариантов в этой задаче немного, а комбинаторная формула дает несколько миллиардов, вероятнее всего, что эта формула не от той задачи.

В задачах, зависящих от переменных, полезно посмотреть, что получается при небольших их значениях. Возможно, удастся быстро подсчитать "руками" и проверить ответ.

Взгляды автора на то, как нужно учить комбинаторике сформировали занятия маткружков (1993-2001 г.), уроки в математических классах 57-й школы (1997-2004 г.), лекции и семинары по дискретной математике в Высшей школе экономики (2000-НВ).

* * *

Особо хочется упомянуть студентов факультета бизнес-информатики ВШЭ, занятия с которыми автор ведет с момента основания факультета (2001 г.). Первые 2 года комбинаторика занимала целый модуль (6-7 лекций и столько же семинаров), а материал курса соответсвовал первым четырем главам. С 2003 г. часть курса, относящаяся непосредственно к комбинаторике, сократилась до 2 лекций и 3 семинаров. Базовыми стали 1, 2 и частично 4-я (в части, касающейся формулы включений-исключений) главы. Но комбинаторные мотивы (в первую очередь — первый параграф пятой главы) востребованы в остальной части курса.

Ритм "один семинар — одна глава" для большинства студентов довольно жесткий, но посильный. Разве что 4-й главе можно посвятить 2 семинара. Дополнительное время для работы со студентами образуется за счет лекций, на которых рассказывать в общем-то нечего. Более точные рекомендации зависят от имеющегося времени, планов и силы студентов. Автор с удовольствием обсудит подобные вопросы по электронной почте.

Популярный стиль обучения комбинаторике через "4 комбинаторные модели" (сочетания и размещения с повторениями и без) автор считает излишне формальным и противоречащим духу комбинаторики. Но нельзя не признать, что для многих студентов это самый простой способ получить положительную оценку (хоть часто и посредственную). Поэтому, если есть время, можно рассказать и про "4 модели".

* * *

Автор признателен всем коллегам, с которыми он вел или обсуждал семинары по комбинаторике. Среди них Т.А. Андреева, А.Г. Броневич, В.А. Кохов, О.П. Кузнецов, А.А. Лазарев, А.А. Лебедев, К.С. Сорокин.

Особо хочется поблагодарить М.Н. Вялого и А.Н. Флерова, с работы с которыми началась карьера автора в ГУ ВШЭ. Именно их система преподавания комбинаторики легла в основу этого задачника.

Отдельная благодарность А. Шеню, прочитавшему сырой текст и приславшему множество ценных замечаний и Р. Кизилову, написашему решения многих задач в качестве практики после 1-го курса.

At last but not least, большое спасибо моим любимым студентам, без которых не было бы и нужды в этой книге. Я вас не забыл, но даже просто список фамилий тех, кто запомнился мне в связи с комбинаторикой, занял бы около страницы. Поэтому упомяну только Софью Кисельгоф, с которой мне довелось общаться и как с ученицей и как с коллегой.

Любые замечания, комментарии или вопросы будут с благодарностью приняты. `dshvarts@mail.ru`.

Глава 1.

Правила суммы и произведения

Рассмотрим несколько типичных задач.

1. На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее?

Решение. У туриста есть 7 способов подняться на гору и для каждого из них есть по 7 способов спуститься. Итого $7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 7 = 49$ способов.

2. Что изменится, если наложить условие, что подьем и спуск осуществляются различными путями?

Решение. Для каждого из 7 способов подняться в гору будет не 7, а 6 способов спуститься. Поэтому ответ $7 \cdot 6 = 42$.

3. Бросают две игральные кости (с шестью гранями каждая).

а) Сколькими способами они могут упасть?

б) Сколькими способами они могут упасть так, что либо на каждой грани выпадет четное число очков, либо на каждой грани выпадет нечетное число очков?

Решение. **а**) На первой кости может выпасть любое число очков от 1 до 6 и, в каждом из этих вариантов на второй кости тоже может выпасть от 1 до 6 очков. Поэтому всего возможностей $6 \cdot 6 = 36$. Кости в этой задаче мы считаем разными, т.е. варианты, когда на первой кости выпадает 1, а на второй — 2 и когда на первой кости выпадает 2, а на второй — 1, считаются различными.

б) Если на каждой грани выпадает четное число очков, то есть 3 возможности для первой кости и 3 для второй (2, 4, 6). Всего $3 \cdot 3 = 9$ вариантов.

Аналогично, если на каждой грани выпадет нечетное число очков (1, 3, 5), будет также 9 вариантов. Всего же возможностей $9 + 9 = 18$.

При решении этих задач использовались следующие два правила.

Правило произведения. *Если обьект A может быть выбран m способами и после каждого такого выбора обьект B может быть выбран n способами, то выбор (A и B) можно осуществить mn способами.*

Правило суммы. *Если обьект A может быть выбран m способами, а обьект B — другими n способами при условии, что одновременный выбор A и B невозможен, то выбор (A или B) можно осуществить $m + n$ способами.*

Формально правило произведения означает, что мощность декартова произведения множеств равна произведению мощностей: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, а правило суммы, *что если два множества не пересекаются, то мощность их объединения равна сумме мощностей:* $A \cap B = \varnothing \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$.

4. Сколькими способами 7 человек могут разместиться в очереди?

Решение. На первом месте может оказаться любой из 7 человек, на втором — любой из 6 (все, кроме уже выбранного первого), на 3-м — любой из 5,..., на последнее место остается только один кандидат. Итого, по правилу произведения $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n *обозначается* $n!$ *и произносится "эн факториал". Удобно считать, что* $0! = 1$. *Далее,* $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \ldots$ *Произведение* k *последовательных натуральных чисел, начиная с* n, *т.е.,* $n(n+1)\ldots(n+k-1)$ *обозначается* $[n]^k$ *и произносится "*n *в верхней степени* k*", а произведение* k *последовательных убывающих натуральных чисел, начиная с* n*:* $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ — $[n]_k$ *("*n *в нижней степени* k*").*

5. Проверьте, что

а) $n! = (n-1)! \cdot n$ для всех n, начиная с 1;

б) при $n \geq k$ $[n]_k = n!/(n-k)!$;

в) $[n]^k = (n+k-1)!/(n-1)!$;

6. В кухне пять лампочек. Каждая может гореть или не гореть. Сколькими способами может быть освещена кухня?

Решение. Для первой лампочки есть два варианта — гореть или не гореть, для каждого из них есть два варианта для второй лампочки, то есть всего $2 \cdot 2 = 4$ варианта. Рассуждая аналогично и применяя правило произведения, получаем $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ варианта.

Обобщим предыдущую задачу и найдем число подмножеств множества из n *элементов.*

Подмножество определяется тем, какие элементы в него входят, а какие не входят. Для каждого из n *элементов множества есть 2 варианта — входит он в подмножество или не входит, поэтому по аналогии с предыдущей задачей получаем* 2^n *вариантов.*

7. Сколько можно составить шестибуквенных слов (слово — это произвольная последовательность букв), содержащих хотя бы один раз букву А, если можно использовать все 33 буквы алфавита?

Решение. Проще подсчитать количество слов, которые не содержат ни одной буквы А. На первом месте может стоять любая из 32 остальных букв, на втором — тоже одна из 32 и т.д. Всего 32^6 слов. Всего же слов по тем же соображениям 33^6. Чтобы получить число слов, содержащих хотя бы одну букву А, надо из числа всех слов вычесть число тех, которые А не содержат. Получим $33^6 - 32^6$.

При решении этой задачи был проиллюстрировано еще одно свойство: если $B \subset A$, *то* $|A \setminus B| = |A| - |B|$.

8. В магазине есть 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Все предметы разные.

Сколькими способами можно купить

а) чашку с блюдцем?

б) комплект из чашки, блюдца и ложки?

в) два предмета с разными названиями?

9. В киоске "Союзпечать" продаются 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт с маркой?

10. Сколько ожерелий можно составить из 5 одинаковых красных бусинок и двух одинаковых синих бусинок?

11. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова "КОМБИНАТОРИКА"?

12. На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 2 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими способами это можно сделать?

13. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно использовать трех курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

14. У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Они готовы менять либо одну марку на одну марку или один значок на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить обмен?

15. В урне находятся три красных и четыре синих шара. Шары одного цвета не различаются. Сколькими способами можно вынуть из урны 4 шара? Рассмотреть упорядоченный и неупорядоченный выбор с возвращением и без возвращения.

16. **а**) Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

б) Та же задача, если флаг может быть и двухцветным, но полосы одного цвета не могут быть рядом?

17. Монету бросают 10 раз. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

18. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

19. Группа изучает 10 предметов. В понедельник — 4 пары, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

20. Сколькими способами можно заполнить одну карточку в лотерее "Спортпрогноз"? (В этой лотерее нужно предсказать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча — победа одной из команд либо ничья; счет роли не играет).

21. **а**) Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых есть единица или тех, в записи которых ее нет?

б) Тот же вопрос для первых 10 миллионов чисел.

22. Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

23. Сколькими способами можно разложить 7 монет различного достоинства по трем карманам?

24. В районе есть четыре города: А, Б и В и Г. Из города А в город Б ведет 6 дорог, из города Б в город В — 4 дороги, из города А в город Г — две дороги, и из города Г в город В — тоже две дороги. Сколькими способами можно проехать от А до В?

25. Сколько можно сделать различных стандартных автомобильных номеров? Стандартный номер имеет вид: А123БВ45 — буква, три цифры, две буквы, две цифры; на каждом месте, предназначенно для буквы, может быть любая из 33 букв русского алфавита, на каждом месте, предназначенном для цифры, может быть любая из 10 цифр.)

26. **а**) Сколько существует различных семизначных телефонных номеров;

б) сколько из них содержат хотя бы одну нечетную цифру?

в) во скольких из них ни одна цифра не встречается дважды?

27. В алфавите некоторого племени всего 5 букв — a, b, c, d и e. Зато слово — это совершенно любая последовательность букв. Сколько в языке этого племени

а) слов из 5 букв;

б) слов из не более, чем из 5 букв;

в) слов из пяти букв, в которых есть хотя бы две одинаковые буквы;

28. В языке одного племени было 6 гласных и 8 согласных, причем при составлении слов гласные и согласные непременно чередовались. Сколько слов из девяти букв могло быть в этом языке?

29. В изданном недавно словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные, затем трехбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово cbcad? (Племя использует английский алфавит).

30. Сколько есть 4-буквенных слов в русском алфавите, в которые входит хотя бы одна гласная? (Всего 33 буквы, 10 из них гласные.)

31. Сколькими способами можно выписать в ряд все буквы алфавита ровно по разу?

32. Код Морзе сопоставляет каждой из букв алфавита последовательность из точек и тире (непустую). Доказать, что хотя бы одна буква закодирована последовательностью, в которой не меньше 5 значков.

33. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

34. Кубик бросают трижды. Среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестерка. Сколько их?

35. Человек имеет 10 друзей и в течение нескольких дней приглашает некоторых из них в гости так, что компания ни разу не повторяется (в какой-то из дней он может не приглашать никого). Сколько дней он может так делать?

36. Лестница состоит из 7 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через некоторые ступеньки (можно даже через все 7). Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?

37. В пассажирском поезде 17 вагонов. Сколькими способами можно распределить по вагонам 17 проводников, если за каждым вагоном закрепляется один проводник?

38. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дадут не более трех имен, а общее число имен равно 200?

39. Сколькими способами можно построить замкнутую ломаную, вершинами которой являются все вершины правильного n-угольника (ломаная может быть самопересекающейся)?

40. В столовой предложено на выбор 6 блюд. Каждый день студент берет некоторый набор блюд (возможно, не берет ни одного блюда), причем этот набор блюд должен быть отличен от всех наборов, которые он брал в предыдущие дни. Какое наибольшее количество дней студент сможет питаться по таким правилам и какое количество блюд он в среднем при этом будет съедать за день?

41. Сколько существует пар (x, y) целых чисел, таких, что $|x| + |y| < 100$?

42. В каждую клетку таблицы 10 на 10 требуется вписать 1 или -1 так, чтобы произведение всех чисел в каждом столбце и произведение чисел в каждой строке равнялись 1. Сколькими способами можно заполнить таблицу?

43. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

44. **а**) Сколькими способами можно перетасовать колоду из 36 карт?

б) так, чтобы красные и черные карты чередовались?

в) так, чтобы любые 4 подряд идущие карты были всех 4 мастей?

45. Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

46. Сколько существует 9-значных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (то есть каждая следующая меньше предыдущей)?

47. Сколько существует 6-значных чисел[1],

а) первая цифра которых 7?

б) делящихся на 5?

в) в десятичной записи которых цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 встречаются ровно по одному разу?

г) в десятичной записи которых цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 встречаются ровно по одному разу и цифры 2 и 4 не стоят рядом?

д) в десятичной записи которых встречаются только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

е) в десятичной записи которых встречаются только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, причем каждая не более одного раза?

ж) сумма цифр которых четна?

з) все цифры которых четны?

и) все цифры которых имеют одинаковую четность?

к) в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

л) в которых все цифры различны?

м) четных чисел, в которых все цифры различны.

н) которые одинаково читаются слева направо и справа налево (например, таких как 543345, 170071)?

о) в их десятичной записи некоторая цифра встречается ровно 5 раз?

п) составленных из цифр 1 и 2?

р) не содержат цифры 2?

с) в запись которых входит цифра 5?

т) в запись которых входит ровно одна цифра 5?

у) делящихся на 4 и состоящих из цифр 1,2,3,4;

ф) делящихся на 4 и состоящих из цифр 1,2,3,4,5,6 причем каждая цифра может

[1] Натуральное число не может начинаться с 0.

встречаться только один раз?;

48. Сколько существует целых чисел от 0 до 999999, в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр?

49. Сколько существует пар целых чисел x, y, заключенных между 1 и 1000, таких, что $x^2 + y^2$ делится на 7?

50. Сколько делителей (включая 1 и само себя) имеет число

а) 2310;

б) $2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{20}$;

в) $3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^6 \cdot 111$;

г) 10^{10}?

51. Какое число имеет больше делителей 20^{13} или 201^3?

52. Даны n различных простых чисел $p_1, p_2, \dots p_n$. Сколько делителей у числа **а**) $p_1 p_2$; **б**) $p_1^2 p_2$; **в**) $p_1^2 p_2^2$; **г**) $p_1^m p_2^k$; **д**) $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}$?

53. Найдите сумму всех

а) чисел от 1 до 99 999;

б) нечетных пятизначных чисел.

в) пятизначных чисел, составленных из цифр 1 и 2.

г) пятизначных чисел, составленных из нечетных цифр.

д) пятизначных чисел, которые можно получить всевозможными перестановками цифр $1, \dots, 5$.

е) пятизначных чисел, которые можно составить из цифр $0, 1, \dots, 6$. (одна и та же цифра в числе может повторяться).

54. Каждую доску забора из 100 досок необходимо раскрасить в один из 6 цветов так, чтобы из любых идущих подряд 5 досок не было одноцветных.

а) Сколькими способами это можно сделать?

б) Тот же вопрос, если забор круговой?

55. Есть 3 гвоздики, 4 розы и 5 тюльпанов. Сколькими способами из них можно составить

а) букет;

б) букет из цветов одного сорта;

в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

г) букет, в котором нечетное количество цветов;

д) букет, не менее, чем из 3 цветов?

Цветы одного сорта считаем одинаковыми. Молодые люди, считающие букетом набор из 0 цветов, могут спросить об этом мнение своей девушки.

56. В отделе работает 8 сотрудников.

а) Каждый месяц ровно один из сотрудников получает премию. Сколькими способами можно составить годовой график выплаты премий?

б) Каждый месяц в отпуске может находится не более одного сотрудника. Сколькими способами можно составить годовой график отпусков? (Каждый сотрудник должен сходить в отпуск ровно один раз).

57. Найдите число прямоугольников, составленных из клеток доски с m горизонталями и n вертикалями, которые содержат клетку с координатами (p, q).

58. Сколькими способами 10 человек могут выстроиться в очередь, если

а) Иванов, Петров и Сидоров хотят стоять подряд (в произвольном порядке)?

б) Иванов хочет стоять раньше Петрова.

в) Иванов и Петров не хотят стоять друг за другом.

59. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное (НОК) равно 2000?

60. Здание имеет форму куба, стоящего на четырех колоннах. Имеется 6 красок. Сколькими способами можно покрасить здание в шесть цветов, так что каждая грань покрашена в один цвет и все цвета использованы?

61. Сколькими способами можно расставить цифры от 0 до 9 в вершинах правильного 10-угольника, так, чтобы 0 и 9 не оказались на диаметрально противоположных местах? Расстановки, отличающиеся поворотом 10-угольника считаем одинаковыми.

62. Сколько существует различных способов размещения 15 человек за столом с занумерованными местами, если A должен сидеть во главе стола (на месте №1), а B не должен сидеть рядом с A?

63. Двенадцать девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

64. Сколько существует различных возможностей рассадить 5 юношей и 5 девушек за круглый стол с 10-ю креслами так, чтобы юноши и девушки чередовались?

65. Сколькими способами можно образовать 6 пар из 6 девушек и 6 юношей?

66. В соревновании участвуют 10 спортсменов. Каково количество возможных вариантов распределения первых трех мест?

67. Сколькими способами можно расставить в ряд 10 различных чисел так, чтобы наибольшее и наименьшее из них стояли рядом?

68. 4 человека должны унести 9 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый способен унести любое количество имеющихся предметов?

69. В аудитории 3 ряда по 5 мест в каждом ряду. На семинаре присутствуют 10 студентов. Один из них никогда не сидит в среднем ряду. Два других студента всегда сидят в первом ряду. Трое из оставшихся всегда сидят слева. Остальные четверо размещаются произвольно. Сколько существует различных размещений студентов в аудитории?

70. Вычислить количество таких последовательностей длины n, состоящих из цифр $1, 2, \ldots, 6$, которые содержат четное число нечетных цифр.

71. На кафедре математики работают n профессоров, читающих $2n$ курсов. Каждый семестр каждый профессор читает 2 курса, каждый курс читается только одним профессором и каждый профессор может читать каждый курс. Сколько существует различных возможностей распределить курсы в осеннем семестре? Сколько существует возможностей распределить курсы в весеннем семестре так, что ни один профессор не читает ту же пару курсов, что и в осеннем семестре?

72. Сколько способов разместить 20 различных книг на 5 полках, если каждая полка может вместить все 20 книг?

73. В школе 65 семиклассников. Они написали три контрольные работы и за каждую получили одну из четырех оценок: $5, 4, 3, 2$. Доказать, что найдутся два ученика с одинаковыми оценками за все работы.

74. Стоматолог выяснил, что в его районе любые два человека отличаются набором зубов. Максимальное количество зубов у человека — 32. Каким может быть максимальное население района?

75. Сколькими способами можно выбрать четырех человек на четыре различные должности, если имеется девять кандидатов на эти должности?

76. Туристическое агентство заявляет о возможности "1001 вариант отдыха". Какое заключение о правдоподобности рекламы можно сделать?

77. На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За один ход можно передвинуть любую из них на соседнюю по вертикали или по горизонтали клетку (две фишки не могут стоять на одной клетке). Могут ли в результате таких ходов встретиться все возможные варианты расположения этих двух фишек, причем ровно по одному разу?

78. Вася собрал 15 васильков и 10 маргариток и решил подарить их двум девочкам — Марго и Рите. Сколькими способами он может разделить свои цветы на два букета, если хочет, чтобы у каждой девочки было хотя бы по одному васильку и три маргаритки?

Глава 2.

Биноминальные и мультиноминальные коэффициенты

Решим для начала несколько задач.

79. Приходя на заседание кафедры, каждый преподаватель, входя в аудиторию, пожимал руки всем присутствующим. Сколько человек участвовали в заседании, если было всего 78 рукопожатий?

Решение. Пусть на заседении присутствовали k преподавателей. Каждый пожал руку всем остальным, то есть сделал $k-1$ рукопожатие. Значит, всего $k(k-1)$. Но каждое рукопожатие мы посчитали два раза, поэтому рукопожатий было $k(k-1)/2$.

Решая уравнение $k(k-1)/2 = 78$, узнаем, что на заседание пришло 13 преподавателей.

Можно решить задачу и перебором — когда второй преподаватель вошел в комнату, произошло первое рукопожатие, когда вошел третий — второе и третье (третьего преподавателя с первым и вторым),… После прихода k-го преподавателя происходили очередные $k-1$ рукопожатий, осталось только дождаться, с приходом какого преподавателя их станет 78. Если Вы не уверены в справедливости первого рассуждения, доведите это до конца. Заодно будет доказано, что

$$1 + 2 + \ldots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

80. Сколькими способами в футбольной команде (11 человек) можно выбрать

а) капитана и его заместителя.

б) двух вице-капитанов;

Решение. **а**) Капитаном может стать любой из 11 футболистов. После выбора капитана на роль его заместителя могут претендовать 10 оставшихся человек. Таким образом, всего есть $11 \cdot 10 = 110$ разных вариантов выбора.

б) Точно также, как и в пункте а), первого из вице-капитанов можно выбрать 11 способами, второго — 10. По правилу произведения получается 110. Но каждую из возможных пар кандидатов $\{A, B\}$ мы посчитали два раза, сначала рассмотрев A, как первого вице-капитана, а B — как второго, затем наоборот. Поэтому правильный ответ — $110/2 = 55$;

81. Сколькими способами можно выбрать команду из трех школьников в классе, в котором учатся 30 человек?

Решение. Первого ученика можно выбрать 30 способами, второго — 29 способами, третьего — 28 способами. Таким образом получаем $30{\cdot}29{\cdot}28$ вариантов выбора. Однако каждая команда при этом подсчете учтена несколько раз: одна и та же тройка учеников может быть выбрана по разному, например, сначала A, потом B, потом C или сначала C, потом A, потом B и т.д. Поскольку число перестановок из трех элементов равно 3!, то каждая команда учтена нами ровно 6 раз. Поэтому получаем $30 \cdot 29 \cdot 28/6$.

Обобщим задачу. Именно, подсчитаем число подмножеств n-элементного множества, содержащих ровно k элементов. Число способов выбрать k элементов поочереди — сначала первый, затем второй и т.д. равно $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)= [n]_k = n!/(n-k)!$. Но каждое из подмножеств мы подсчитали столько раз, сколько есть способов упорядочить k элементов, а это число равно $k!$. Поэтому на $k!$ надо поделить. Полученные числа называются биномиальными коэффициентами, обозначаются

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(читается: "число сочетаний из n по k"). Теперь некоторые задачи мы можем решить моментально.

82. Сколькими способами можно выбрать 3 книжки из 5?

Решение. Ответ — $\binom{5}{3}$, по определению биномиальных коэффициентов.

83. Сколькими способами можно выбрать из 7 человек комиссию из 3 человек и ее председателя (из числа членов комиссии)?

Решение. Число способов выбрать комиссию из трех человек равно $\binom{7}{3}$ и для каждого из них есть 3 способа выбрать председателя. Ответ: $3\binom{7}{3}$.

При подсчете биномиальных коэффициентов удобно сразу сокращать на больший из факториалов в знаменателе. Например,

$$\binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35.$$

84. У бедного студента осталось гречки на две порции, риса на три порции и макарон на две порции. Сколько у студента способов съесть это на завтраки в течение недели (по одной порции в день)?

Решение. Если студент разложит имеющиеся 7 порций еды по разным тарелкам, то вариантов выбора станет 7!, но, поскольку разные порции, например, риса не отличимы, то общее количество необходимо разделить на 2! (число способов упорядочить 2 тарелки с гречкой), затем на 3! (число способов упорядочить 3 тарелки с рисом), затем на 2! (макароны). Итого получим $7!/2!3!2! = 210$ способов завтракать в течение недели[1].

[1] Хотя разнообразие, надо признать, довольно грустное.

Выражения вида

$$\frac{n!}{k_1!, \ldots, k_m!},$$

где $k_1+, \ldots, +k_m = n$, называются мультиноминальными коэффициентами и обозначаются $\binom{n}{k_1,\ldots,k_m}$. Подробнее об их свойствах будет сказано в следующей главе.

85. Сколькими способами можно выбрать 4 краски из имеющихся 7 различных?

86. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

87. Сколькими способами можно разбить $2n$ человек на пары?

88. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы среди них

а) был ровно один туз?

б) был хотя бы один туз?

в) были представители всех четырех мастей?

89. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине было по 2 туза?

90. Сколькими способами колоду из 36 карт можно перетасовать так, чтобы карты каждой масти шли в порядке старшинства?

91. Чемпионат России по шахматам проводится в один круг. Сколько играется партий, если участвуют 18 шахматистов?

92. На плоскости дано n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?

93. Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике?

94. На плоскости дано n прямых общего положения. (Никакие две прямые не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке.) Чему рано число образованных ими треугольников?

95. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 11 точек. Сколько существует **а**) треугольников; **б**) четырехугольников с вершинами в этих точках?

96. На двух параллельных прямых a и b выбраны точки $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно. Сколько будет точек пересечения, если провести все отрезки вида A_iB_j $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$, если известно, что никакие три из этих отрезков в одной точке не пересекаются?

97. На плоскости дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует не менее $\binom{n}{5}/(n-4)$ различных выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках.

98. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали, причем никакие 3 из них не пересекаются в одной точке.

а) Во скольких точках внутри 20-угольника пересекаются проведенные диагонали?

б) На сколько частей они разделяют n-угольник?

99. На окружности отмечено 10 точек. Сколько существует несамопересекающихся незамкнутых 9-звенных ломаных с вершинами в этих точках?

100. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах

а) "КОМПЬЮТЕР";

б) "ЛИНИЯ";

в) "ПАРАБОЛА";

г) "АБРАКАДАБРА";

д) "ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ"[2]?

е) Как изменится ответ, если потребовать, чтобы все буквы О стояли рядом?

101. **а**) Спортивный клуб насчитывает 30 членов, из которых надо выделить 4 человека для участия в забеге на 1000 метров. Сколькими способами это можно сделать?

б) Сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете?

102. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырехместную?

103. Сколькими способами можно составить расписание первого тура чемпионата России по футболу, в котором играет 16 команд? (Кто хозяин поля, важно).

104. Сколько слов можно составить из пяти букв А и не более чем из трех букв Б?

105. Сколькими способами можно переставить буквы слова "ЭПИГРАФ" так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

106. Найти число слов в алфавите из n символов, в которые каждый символ входит ровно 2 раза.

107. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

108. Сколькими способами можно составить комиссию из 3 человек, выбирая ее членов из 4 супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

109. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более трех юношей?

110. Труппа театра состоит из 20 артистов. Сколькими способами можно выбрать из нее по 6 человек для участия в двух спектаклях так, чтобы ни один артист не участвовал в двух спектаклях?

111. Из двух математиков и десяти экономистов надо составить комиссию из восьми человек. Сколькими способами можно составить комиссию, если в нее должен входить хотя бы один математик?

112. В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырех человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

113. Рота состоит из трех офицеров, шести сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых?

114. Сколькими способами можно выбрать из 15 различных слов набор, состоящий

---

[2] Среди известных автору слов это содержит наибольшее количество букв О при отсутствии других гласных.

не более чем из 5 слов?

115. Сколькими способами можно

а) разбить 10 человек на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой;

б) разбить 15 человек на три команды по 5 человек в каждой;

в) выбрать из 15 человек две команды по 5 человек в каждой?

116. Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из 30 различных бусин, на 8 частей (резать можно только между бусинами)?

117. Ладья может за каждый ход переместиться на соседнее поле вверх или вправо. Сколько различных путей перемещения ладьи из левого нижнего угла шахматной доски 8×8 в правый верхний угол?

118. Присутствующие на собрании $2n$ человек разбились на пары для обсуждения разных вопросов (так что образовалось n пар).

а) Сколько существует различных разбиений на пары?

б) Докажите, что количество различных разбиений есть нечетное число.

119. Сколько существует 6-значных чисел,

а) у которых по три четных и нечетных цифры;

б) у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей;

в) сумма цифр которых равна 2; **г**) 3; **д**) 4?

120. Для участия в лотерее "Спортлото" нужно указать шесть номеров из имеющихся на карточке 45 номеров.

а) Сколькими способами можно заполнить карточку "Спортлото"?

б) После тиража организаторы лотереи решили подсчитать, каково число возможных вариантов заполнения карточки, при которых могло быть угадано ровно три номера. Помогите им в этом подсчете.

121. Имеется 20 человек — 10 юношей и 10 девушек. Сколько существует способов составить компанию, в которой было бы одинаковое число юношей и девушек?

122. Человек имеет 6 друзей и в течение 5 дней приглашает к себе в гости каких-то троих из них так, чтобы компания ни разу не повторялась. Сколькими способами он может это сделать?

123. Полоска $1 \times n$ разбита на единичные квадраты, каждый из которых покрашен в один из четырех цветов: черный, белый, красный и желтый. Сколькими способами это можно сделать цветом при условии, что в белый цвет покрашены 4 квадрата, а в черный — 6 $(n \geq 10)$?

124. Девять волейбольных команд принимают участие в турнире, каждая команда встречается с другой в точности один раз. Игры проводятся на двух площадках: площадке A и площадке B. Возможна ли ситуация, когда при любом расписании игр найдутся 4 команды, которые будут играть все 6 игр друг с другом на одной и той же площадке? Возможно ли, что всегда найдутся 4 команды, которые будут играть все игры друг с другом на площадке A?

125. Сколько n-значных чисел содержат четное число нечетных цифр?

126. В кинозале 10 рядов кресел. 40 человек смотрят фильм. Докажите, что обязательно найдутся по крайней мере два ряда, в которых сидит одинаковое количество зрителей.

127. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные — в порядке убывания?

128. 3 человека должны унести 9 различных предметов.

а) Сколькими способами это можно сделать, если каждый готов взять 3 предмета?

б) А если третий согласен нести и 4 предмета?

129. Сколькими способами можно выложить 8 фишек на доску 6×6 так, чтобы в каждом ряду лежала хотя бы одна фишка?

130. **а**) Сколько существует способов разместить 6 одинаковых шашек на шахматной доске 8×8 так, чтобы никакие две шашки не находились в одном горизонтальном или вертикальном ряду?

б) Сколько существует способов разместить 2 белых и 4 черных шашки на шахматной доске 8×8 так, чтобы никакие две шашки не находились в одном горизонтальном или вертикальном ряду?

131. Найдите m и n зная, что
$\binom{n+1}{m+1} : \binom{n+1}{m} : \binom{n+1}{m-1} = 5 : 5 : 3.$

132. В комиссии из 10 депутатов произошло 14 попарных ссор. Докажите, что все равно можно составить подкомиссию из трех невраждующих депутатов.

133. В парламенте 30 депутатов. Каждые два из них либо лояльны друг к другу, либо враждуют, причем каждый лоялен ровно к 6 другим. Каждые 3 депутата образуют комиссию. Найдите общее число комиссий, в которых все три члена попарно лояльны или все трое попарно враждуют.

134. На полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг, никакие две из которых не стоят рядом?

135. На окружности отмечено десять точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках?

136. На собеседовании десяти человекам был предложен тест, состоящий из нескольких вопросов. Известно, что любые пять человек ответили вместе на все вопросы (т.е. на каждый вопрос хоть один из пяти дал правильный ответ), а любые четыре — нет. При каком минимальном количестве вопросов это могло быть?

137. Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как их разделить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся не менее 6 членов комиссии? Рассмотрите задачу также в том случае, когда комиссия состоит из n человек, а сейф можно открыть при наличии m членов комиссии ($m \leq n$).

138. Имеется куб размером $10 \times 10 \times 10$, состоящий из маленьких единичных кубиков. В центре O одного из угловых кубиков сидит кузнечик. Он может прыгать в центр кубика, имеющего общую грань с тем, в котором кузнечик находится в данный момент, причем так, чтобы расстояние до точки O увеличивалось. Сколькими способами кузнечик может допрыгать до кубика, противоположного исходному?

139. Сколько бинарных последовательностей (элементы последовательности — 0, 1) длины n содержат

а) в точности k символов 1?

б) не менее k символов 1?

140. Сколько троичных последовательностей (элементы последовательности — 0, 1,

2) длины n содержат в точности k символов 1?

141. Сколькими различными способами можно представить 1000000 в виде произведения трех натуральных чисел? Произведения, отличающиеся лишь порядком сомножителей, считаются тождественными.

142. 120 одинаковых шаров уложены в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

143. На школьном вечере присутствуют 12 юношей и 15 девушек. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

144. Сколькими способами можно рассадить 12 человек по 3 комнатам так, чтобы в первых двух было по 5 человек, а в третьей — 2 человека?

145. У Нины 7 разных шоколадных конфет, у Коли 9 разных карамелек. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом пятью конфетами (5 на 5)?

146. В классе 25 учеников. Сколькими способами учитель может назначить

а) двух дежурных;

б) трех дежурных;

в) четырех дежурных при условии, что Петров и Сидоров не могут дежурить одновременно?

Глава 3.

Тождества с биноминальными коэффициентами. Треугольник Паскаля

147. Найти коэффициент при x^k в разложении $(1+x)^n$ по степеням x.

Решение. Раскроем скобки, но не будем пока приводить подобные слагаемые. Слагаемые вида x^k появятся из произведений, в которые из k скобок вошел x, а из остальных $n-k$ — единица. То есть, нужно найти число способов выбрать k скобок (из которых в произведение войдет x из n. Это число по определению $\binom{n}{k}$. То есть

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Эта формула называется "Бином Ньютона"[1] *Немного ее обобщим.*

148. **Полиномиальная теорема.** Докажите, что в равенстве

$$(x_1 + \ldots + x_m)^n = \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$$

коэффициенты $\binom{n}{k_1,\ldots,k_m}$ могут быть найдены по формуле

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Решение. Раскроем скобки, но не будем пока приводить подобные слагаемые. Получим сумму, состоящую из всевозможных произведений, $x_1, \ldots, x_m$. Коэффициент при $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{k_m}$ это число произведений, в которые x_1 входит k_1 раз, x_2 — k_2, ..., x_m — k_m,

[1] Который уже стал символом сложности математики. Диссертацию о биноме Ньютона писал у Конан-Дойля профессор Мориарти, а Бегемот в булгаковском "Мастере и Маргарите", предсказывая время смерти, презрительно хмыкает: "Тоже мне бином Ньютона!" А оказывается, все довольно просто.

которое, в свою очередь, есть число слов из символов $x_1, \ldots, x_m$, в которые x_i входит k_i раз. Рассуждая аналогично задаче 84 из главы 2, получаем как раз $\binom{n}{k_1,\ldots,k_m}$.

149. Докажите, что $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Решение. Подобные тождества можно доказывать двумя способами — прямым вычислением:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{n-k}$$

или комбинаторным рассуждением, показывающим, что правая и левая части равенства суть одно и то же число, просто вычисленное разными способами. В данном случае для того, чтобы выбрать k элементов из n, можно просто выбрать эти элементы ($\binom{n}{k}$ способов), а можно выбрать те $n-k$ элементов, которые в наши k не попадут ($\binom{n}{n-k}$ способов).

150. Докажите, что $\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}$.

Решение. Вычисление:

$$\binom{n+1}{m+1} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{(m+1)!(n-m)!} =$$
$$= \frac{(m+1)\cdot n!}{(m+1)!(n-m)!} + \frac{(n-m)\cdot n!}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} =$$
$$= \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}.$$

Комбинаторное рассуждение: число способов выбрать $m+1$ элемент из $n+1$, по определению равное $\binom{n+1}{m+1}$, можно подсчитать и по-другому. Рассмотрим два случая: если 1-й элемент входит в выбранные $m+1$, то нам осталось выбрать m из оставшихся n; если же первый элемент в выбираемые нами не входит, то из оставшихся n нужно выбрать уже $m+1$ элементов. Всего $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}$ вариантов.

Как видно из примеров, в простых случаях удобно написать выкладку, в более сложных легче привести рассуждение.

Треугольник Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

строится сверху вниз — каждая строка начинается и кончается единицами, а в остальных клетках записывается сумма чисел, стоящих над ней. Оказывается, что в клетках треугольника Паскаля стоят биномиальные коэффициенты. Более точно,

151. Докажите, что в n-й строке и k-м столбце треугольника Паскаля стоит $\binom{n}{k}$. Нумерация столбцов начинается с 0.

Решение. Докажем по индукции по строкам. Для первой строки утверждение очевидно — $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$. Пусть теперь утверждение доказано для первых n строк. Число, стоящее на k-м месте в $n+1$-й строке равно сумме двух чисел, стоящих над ним — чисел из n-й строки и $k-1$-го и k-го столбцов, т.е. по предположению индукции $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$, а это по предыдущей задаче ровно $\binom{n+1}{k}$. Что и требовалось.

152. В разложении $(x+y)^n$ по формуле бинома Ньютона второй член оказался равен 240, третий — 720, а четвертый — 1080. Найдите x, y и n.

153. При каких значениях n все коэффициенты в разложении бинома Ньютона $(a+b)^n$ нечетны?

154. Докажите, что при $k < (n-1)/2$ $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$, а при $k > (n-1)/2$ $\binom{n}{k} > \binom{n}{k+1}$, т.е. последовательность биноминальных коэффициентов возрастает до середины, а потом убывает.

155. При каком k достигает максимума выражение $k\binom{40}{k}$?

156. Какое слагаемое в разложении $(1+2)^{100}$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?

157. Докажите, что если p — простое число и $1 \le k \le p-1$, то $\binom{p}{k}$ делится на p.

158. Определите коэффициенты, которые будут стоять при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1+x^5+x^7)^{20}$.

159. Найдите константу в разложении $(x^3 + 1/x^2)^{10}$ по степеням x.

160. Найдите коэффициент при

а) x^{29} и x^{30} в выражении $(1+x+x^2+\ldots+x^9+x^{10})^3$.

б) x^3y^7 в разложении $(2x-y)^{10}$.

в) коэффициент при $x_1^3x_2x_4^5x_5$ в разложении $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{10}$.

161. **Малая теорема Ферма.** Пусть p — простое число. Тогда $a^p \equiv a \mod p$. Докажите теорему Ферма, разлагая $(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{a \text{ раз}})^p$ посредством полиномиальной теоремы.

162. Вычислите суммы:

а) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$;

б) $\binom{n}{0} + a\binom{n}{1} + a^2\binom{n}{2} + \ldots + a^n\binom{n}{n}$;

в) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}$;

г) $\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{k}$;

д) $\binom{n}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} - \ldots$.

163. Докажите тождества:

а) $\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$;

б) $\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$;

в) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \ldots + \binom{k-1}{k-1}$.

Сделайте это разными способами: пользуясь тем, что $\binom{n}{k}$ — это количество k-элементных подмножеств в множестве из n элементов; исходя из того, что $\binom{n}{k}$ — это коэффициент при x^k у многочлена $(1+x)^n$;

164. **Свойство шестиугольника.** Докажите равенство

$$\binom{n-1}{k-1}\cdot\binom{n}{k+1}\cdot\binom{n+1}{k}=\binom{n-1}{k}\cdot\binom{n+1}{k+1}\cdot\binom{n}{k-1}.$$

Написать, причем тут 6-угольник

165. Докажите нижеследующие равенства, показав, что левая и правая части подсчитывают число элементов в одном и том же множестве.

а) $\sum_k \binom{k}{j}\binom{n}{k}=\binom{n}{j}2^{n-1}$

б) $\sum_{A,B\subset N}|A\cup B|=n4^{n-1}$, где $n=|N|$.

166. Используйте комбинаторные рассуждения для доказательства равенств

а) $\binom{m_1+m_2}{n}=\sum_{k=0} n\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}$;

б) $\binom{n+k+1}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}$;

в) $\sum_{k=0}^{n}\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}=\binom{m_1+m_2}{n}$;

г) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

167. Докажите, что число $\binom{n+3}{k+3}-\binom{n}{k}-\binom{n}{k+3}$ делится на 3.

168. Вычислите сумму

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{m-k}{r}.$$

(Значение зависит от соотношения $r<n$ или $r\geq n$.)

169. Найдите целые p, q, r, такие, что

а)

$$n^3=p\binom{n}{1}+q\binom{n}{2}+r\binom{n}{3}$$

для всех целых неотрицательных n.

б) Используйте полученное равенство для нахождения суммы $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

170. Почему равенства $11^2=121$ и $11^3=1331$ похожи на строчки треугольника Паскаля? Чему равно 11^4?

171. Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число a (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются).

172. Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме чисел предыдущей правой диагонали, начиная с самого левого вплоть до стоящего справа над числом.

173. Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме чисел в предыдущей левой диагонали, начиная с самого правого вплоть до стоящего слева над числом.

174. Докажите равенство:

$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\ldots=F_{n+1},$$

где F_n — числа Фибоначчи: $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, $F_2 = 3$, $F_3 = 5$, $\ldots$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Сумма, стоящая в левой части равенства, может быть интерпретирована, как сумма элементов треугольника Паскаля, стоящих в одной диагонали.

Глава 4.

Формула включений и исключений и задача Муавра

4.1. Задача Муавра

Задачей Муавра обычно называют одну из двух задач, часто применяемых при комбинаторных подсчетах:

***175**. Сколько решений имеет уравнение*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

***а**) в натуральных; **б**) в целых неотрицательных числах?*

Задачу удобно интерпретировать так: есть n одинаковых выстроенных в ряд шаров, которые нужно разделить на k частей, т.е. поставить между ними k перегородок, причем в первом случае перегородки не могут стоять рядом и в начале (конце) ряда, а во втором случае таких ограничений нет, например, если все перегородки окажутся в конце, получится решение уравнения $x_1 = n$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_k = 0$.

В первом случае есть $n-1$ место между шарами, куда можно поставить $k-1$ перегородку и число решений есть число способов выбрать из $n-1$ мест $k-1$, где перегородки будут поставлены, т.е. $\binom{n-1}{k-1}$.

Во втором случае есть n одинаковых шаров и $k-1$ одинаковая перегородка, которые можно расположить произвольным образом, т.е. из $n+k-1$ места выбрать n мест для шаров (или, если угодно, $k-1$ место для перегородок). Получим $\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Часто задача Муавра переформулируется так: сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы k натуральных (неотрицательных целых) слагаемых (представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?

В качестве примера решим несколько задач.

176. Сколькими способами можно составить букет из 17 цветков, если в продаже имеются гвоздики, розы, гладиолусы, ирисы, тюльпаны и васильки?

Решение. Пусть в букете x_1 гвоздик, x_2 розы, x_3 гладиолусов, x_4 ирисов, x_5 тюльпанов и x_6 васильков. Тогда нам нужно найти число целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 17$, причем $x_i \geq 0$.

Применяя задачу Муавра, получаем $\binom{17+6-1}{6-1} = \binom{22}{5}$.

177. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ при дополнительных ограничениях $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq -5$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 8$?

Решение. Положим $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 + 5$, $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4 - 8$. При заданных ограничениях $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ тогда и только тогда, когда $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 26$ и каждое $y_i \geq 0$; последняя задача есть стандартная задача Муавра, число решений которой равно $\binom{26+4-1}{4-1} = \binom{29}{3} = 3654$.

178. Сколькими способами можно разделить 10 одинаковых пирожных между Анной, Борисом и Валентиной, если Анна должна получить не менее одного пирожного, Борис — не менее двух, а Валентина не менее трех?

179. Найдите число членов в разложении $(x + y + z)^{10}$ (после приведения подобных членов).

180. Нужно купить 9 ручек, в продаже имеются ручки 4 видов. Сколькими способами это можно сделать?

181. Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по монете?

182. Есть 5 карточек с цифрой «3», 3 карточки с цифрой «4» и 3 карточки с цифрой «5». Сколькими способами можно выложить ряд из 8 карточек так, чтобы цифры, написанные на выложенных карточках, неубывали слева направо?

183. Сколькими способами 4 человека могут разделить между собой

а) 10 яблок;

б) 6 яблок, один апельсин, одну сливу и один мандарин;

в) 4 яблока, 2 апельсина и одну сливу;

г) 7 яблок и 4 апельсина?

Фрукты одного вида считаем одинаковыми.

184. Имеется m белых и n черных шаров, причем $m > n$. Сколькими способами можно все шары разложить в ряд так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?

185. Сколькими способами можно расселить 15 гостей в четырех комнатах, если требуется, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

186. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров (некоторые ящики могут оказаться пустыми)?

187. Сколькими способами можно разделить 100 одинаковых акций между 5-ю людьми так, чтобы каждому досталось не менее одной акции?

188. Сколькими способами можно выбрать 10 чисел от 1 до 35, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

189. С понедельника по пятницу доктор должен принять 6 человек. Ежедневно он может принимать любое количество пациентов. Сколькими способами он может составить расписание приема? (Порядок приема пациентов в течение дня существенен.)

190. На каждом борту лодки должно сидеть по 4 человека. Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть 31 кандидат, причем десять человек хотят сидеть на левом борту лодки, двенадцать — на правом, а девяти безразлично где сидеть?

191. Сколькими способами можно выложить в ряд 5 красных, 5 синих и 5 зеленых шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

192. Сколькими способами можно представить 1000000 в виде произведения трех множителей, если произведения, отличающиеся порядком множителей, считаются различными?

193. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6.

а) Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым;

б) А если некоторые ящики могут оказаться пустыми?

194. Поезду, в котором находится m пассажиров, предстоит сделать n остановок.

а) Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках?

б) Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

195. Сколькими способами можно расположить в 9 лузах 7 белых и 2 черных шара? Часть луз может быть пустой, лузы считаются различными.

196. Общество из n членов выбирает из своего состава одного представителя.

а) Сколькими способами может произойти открытое голосование, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)?

б) Решите ту же задачу, если голосование — тайное, т.е. учитывается лишь число голосов, поданных за каждого кандидата, и не учитывается, кто за кого голосовал персонально.

197. 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение и учитывается лишь количество голосов, поданных за каждое предложение?

198. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем

а) 8 открыток;

б) 8 различных открыток?

199. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.

а) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?

б) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

200. Сколькими способами 4 черных шара, 4 белых шара и 4 синих шара можно разложить в 6 различных ящиков?

201. Сколькими способами 12 пятаков можно разложить по 5 различным кошелькам так, чтобы ни один кошелек не оказался пустым?

202. В кошельке лежит по 20 монет достоинством в 10, 15 и 20 копеек. Сколькими способами можно из этих 60 монет выбрать двадцать?

203. Сколькими способами можно разложить 3 рублевых купюры и 10 полтинников в 4 различных пакета?

204. Переплетчик должен переплести 12 одинаковых книг в красный, зеленый или синий переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

205. В большой коробке лежат шарики k цветов (шарики ничем не отличаются). Для игры Коля хочет взять n шариков и положить их в m коробок. Сколькими способами он может это сделать?

206. Сколько существует различных 3-подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 20\}$, не содержащих двух последовательных чисел?

207. Сколькими способами можно разместить 20 различных книг на 5 полках, если каждая полка может вместить все 20 книг?

4.2. Формула включения и исключения

Начнем с простой задачи.

208. Сколько существует натуральных чисел от 1 до 1000, которые не делятся ни на 2, ни на 5?

Решение. Сначала вычеркнем числа, кратные 2; их количество равно 500. Затем вычеркнем числа, кратные 5; их количество равно 200. При этом числа, делящиеся и на 2 и на 5, будут вычеркнуты дважды. Их количество равно 100 (это числа, делящиеся на 10). Значит, всего мы вычеркнули $500 + 200 - 100 = 600$ чисел, а осталось $1000 - 600 = 400$.

Здесь мы неявно воспользовались (ну, или заново доказали) еще один простой теоретико-множественный факт — Число элементов в объединении двух множеств равно сумме мощностей этих множеств минус число элементов в их пересечении:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Оказывается, что и для большего числа множеств мощность объединения выражается через мощности пересечений, например,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Здесь уже не удается ограничиться пересечениями по два множества, добавляется и тройное пересечение.

Общее утверждение (оно как раз и называется формулой включений и исключений выглядит так:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{i_1 < i_2 \ldots < i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}| \right).$$

То есть для подсчета числа элементов в объединении множеств нужно сначала сложить мощности всех множеств, затем вычесть мощности всех попарных пересечений, затем прибавить мощности всех пересечений по 3 множества и т.д.

Доказательство. *В левой части равенства все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств считаются по 1 разу. Докажем то же про правую часть.*

Пусть x принадлежит ровно k множествам из $A_1, \ldots, A_n$. Тогда при суммировании мощностей $A_1, \ldots, A_n$ мы считаем его k раз со знаком $+$, x также входит в $\binom{k}{2}$ попарных пересечений, где мы считаем его со знаком $-$. И так далее. В пересечения больше, чем k множеств x не входит, поэтому всего в правой части равенства x учитывается

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}$$

раз. Подставим в формулу для бинома Ньютона $x = 1$ и $y = -1$.

$$0 = (1-1)^k = 1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^k\binom{k}{k},$$

Перенеся все, кроме 1 в левую часть, получим

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} = 1,$$

что и требовалось.

Приведем еще пару примеров.

209. Сколько существует натуральных чисел от 1 до 900, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Решение. Пусть A — множество чисел, делящихся на 2, B — делящихся на 3, C — делящихся на 5. Найдем количество чисел, делящихся или на 2 или на 3 или на 5, то есть $A \cup B \cup C$. По формуле включений и исключений

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

$|A| = 450$, $|B| = 300$, $|C| = 180$, $|A \cap B| = 150$ (это числа, делящиеся на 6), аналогично $|A \cap C| = 90$, $|B \cap C| = 60$ $|A \cap B \cap C| = 30$ и

$$|A \cup B \cup C| = 450 + 300 + 180 - 150 - 90 - 60 + 30 = 660.$$

Нас же интересуют числа, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Их число равно $900 - |A \cup B \cup C| = 900 - 760 = 240$.

210. В коллективе 70 человек. 25 из них знают английский язык, 16 — немецкий, 18 - французский, 5 — английский и немецкий, 7 — английский и французский, 3 — немецкий и французский, 3 — все три языка. Сколько людей знают хотя бы один из этих трех языков?

Решение. Пусть A — множество людей, знающих английский, B — немецкий, C — французский. По условию необходимо найти $|A \cup B \cup C|$, причем известно, что $|A| = 25$, $|B| = 16$, $|C| = 18$, $|A \cap B| = 5$, $|A \cap C| = 7$, $|B \cap C| = 3$ $|A \cap B \cap C| = 3$. Применим формулу вклучений и исключений: $|A \cup B \cup C| = 25 + 16 + 18 - 5 - 7 - 3 + 3 = 47$.

211. В поход ходили 80% учеников класса, а на экскурсии было 60% класса, причем каждый был в походе или на экскурсии. Сколько процентов класса было и там, и там?

212. В классе 35 учеников. 20 из них занимаются в математическом кружке, 11 — в биологическом, а 10 ничем не занимаются. Сколько ребят занимаются и математикой, и биологией?

213. На дискотеке 80% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка и 50% времени шел дождь. Какую наименьшую долю времени все это обязано было происходить одновременно?

214. Из 100 человек 85 знают английский язык, 80 — испанский, 75 — немецкий. Сколько человек заведомо знают все три языка?

215. Каждый из 4 языков знают 15 человек, каждые 2 — 6, каждые 3 языка — двое, все языки — один. Сколько человек в группе?

216. Найти количество положительных целых чисел, не превышающих 1 000 000, которые являются либо квадратами, либо кубами целых положительных чисел.

217. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Каково наименьшее количество номеров нужно перебрать, чтобы наверняка открыть камеру? (Числа 23 и 37 можно увидеть и в числе 237.)

218. Сколько перестановок 10 цифр либо начинаются с трех цифр 012, либо содержат последовательность цифр 23 на третьем и четвертом местах, либо оканчиваются комбинацией цифр 789?

219. Сколькими способами можно расставить 7 человек в очередь так, чтобы либо АБВ на первых трех местах, либо БВГ на втором–четвертом месте, либо ЕЖ на последнем?

220. На 8 карточках написано слово УКОРИЗНА. Сколькими способами можно выбрать 5 из них так, чтобы в наборе оказалось не меньше 2 согласных и не больше 2 гласных?

221. Сколькими способами можно закрасить клетки таблицы 3×4 так, чтобы незакрашенным оставался или верхний ряд, или нижний ряд, или две средних вертикали?

222. Из 100 кубиков 80 имеют красную грань, 85 — синюю и 75 — зеленую. Каково наименьшее возможное число кубиков, имеющих грани всех трех цветов?

223. В группе A_1 студентов имеет не менее одной двойки, A_2 — не менее двух двоек, A_3 — не менее трех двоек и т. д. Как, зная числа $A_1, A_2, \ldots$, определить общее число двоек в группе?

224. **а**) Сколько различных элементов в объединении четырех множеств, имеющих по 13 элементов, если каждая пара множеств имеет по 8 общих элементов, каждая тройка множеств имеет по 5 общих элементов и 3 элемента принадлежат всем четырем множествам.

б) приведите пример таких множеств.

225. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, в которых

а) ни один из элементов не стоит на своем исходном месте;

б) по крайней мере 2 элемента стоят на своем исходном месте;

в) ровно 4 элемента стоят на своих исходных местах;

г) 1 и 2 не стоят на своих местах;

д) ни один из элементов 1, 2, 3 не стоит на своем месте?

226. Найти количество подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 12\}$, которые имеют пустое пересечение по крайней мере с одним из подмножеств $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $\{6, 8, 10, 12\}$.

227. Найдите число решений уравнения $x + y + z = n$, где x, y, z — *различные* неотрицательные целые числа.

228. При выяснений читательских вкусов студентов оказалось, что 60% студентов читают журнал A, 50% — журнал B, 50% — журнал C, 30% — журналы A и B, 20% — B и C, 40% — A и C, 10% — A, B и C. Выяснить, сколько процентов студентов

а) не читает ни одного из журналов;

б) читает в точности 2 журнала;

в) читает не менее двух журналов.

229. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210 и

а) не делящихся ни на 3 ни на 5 ни на 7;

б) не делящихся ни на 2 ни на 3 ни на 5 ни на 7;

в) не делящихся ни на 6 ни на 10 ни на 15.

230. **а**) Сколько различных слов можно получить перестановкой букв aaabbbccc?

б) Сколько будет таких слов, в которых не стоят две одинаковые буквы подряд?

231. Найти количество перестановок символов алфавита $\{А, Б, В, Г, \ldots, Я\}$, содержащих по крайней мере одну из последовательностей *АБВГД*, *КЛМНО*, *ЬЪЭЮЯ*.

232. Имеется 40 одинаковых конфет и 10 различных шоколадок. Сколько способов разделить эти сладости между 5 детьми так, чтобы каждый получил не менее 5 конфет и по крайней мере 1 шоколадку?

233. Четыре супружеские пары занимают места за вращающимся круглым столом (8 мест). Сколько способов разместить их, чтобы никакая пара не сидела на диаметрально противоположных местах?

234. При изготовлении пирожные — колечки трех сортов: шоколадные, с корицей и с орехами — упаковываются в стандартные коробки по 18 колечек в каждой. Каждая коробка может содержать колечки всех видов. Порядок колечек в коробке не существенен.

а) Сколько можно составить различных наборов колечек в коробке?

б) Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не более 9, колечек с корицей не более 3, а ореховых не более 9?

в) Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не менее 3 и не более 9, колечек с корицей не менее 3 и не более 9, а ореховых не менее 2 и не более 4?

235. Есть 3 гвоздики, 4 розы и 5 тюльпанов. Сколькими способами из них можно составить букет из 9 цветов? (Цветы одного сорта считаем одинаковыми.)

236. Сколько целочисленных решений у уравнения $x_1+x_2+x_3+x_4 = 10$ при условии, что

а) $x_1 \leq 3$;

б) $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 3$;

в) $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 3$, $x_3 \leq 3$;

г) $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 3$, $x_3 \leq 3$, $x_4 \leq 3$?

237. Нужно разгрузить 11 составов с зерном на три склада. На первый склад может поместиться 6 составов, на второй — 5 составов, на третий — 4 состава. Сколькими способами можно разгрузить составы? (Порядок разгрузки составов во внимание не принимать.)

Глава 5.

Разнообразные приложения

5.1. Логика, теория множеств, бинарные отношения

238. Каких подмножеств у множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ больше — тех, которые содержат множество $\{1, 3, 5\}$, или тех, которые не пересекаются с ним?

239. Сколько всего подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$? Сколько из них содержат хотя бы одно нечетное число?

240. Каких подмножеств n-элементного множества больше: с четным или с нечетным количеством элементов?

241. Сколько среди подмножеств X множества $\{1, 2, 3, \ldots, 11\}$ таких, что $\{3\} \in X$ и $\{5\} \notin X$?

242. Сколько существует

а) булевых векторов длины n, т.е. векторов, компоненты которых — нули и единицы?

б) булевых матриц размера $n \times m$, т.е. матриц, элементы которых нули и единицы?

Во скольких из этих матриц

в) любой столбец содержит ровно k единиц?

г) любой столбец — ненулевой?

д) все столбцы попарно различны?

243. Множество C состоит из n элементов. Сколькими способами можно выбрать в C два подмножества A и B так, чтобы

а) множества A и B не пересекались;

б) множество A содержалось бы в множестве B?

244. Пусть n и k — фиксированные положительные целые числа, $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Сколько существует последовательностей $(T_1, T_2, \ldots, T_k)$ подмножеств множества S таких, что $T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_k = \varnothing$?

245. Сколько существует различных последовательностей $A_0, A_1, \ldots, A_n$ подмножеств множества $\{1, 2, \ldots n\}$ таких, что $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n$?

246. Докажите неравенства Бонферрони для подмножеств $A_1, A_2, \ldots A_n \subset S$:

$$\textbf{а)}\ \sum_{k=1}^{q} \sum_{I\subset\{1,\dots n\},|I=k|} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \leq \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|,$$

если q — четное число;

$$\textbf{б)}\ \sum_{k=1}^{q} \sum_{I\subset\{1,\dots n\},|I=k|} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \geq \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|,$$

если q — нечетное число.

Эти неравенства показывают, что ошибка, возникающая при удалении всех, кроме первых q членов, в формуле включений-исключений, имеет тот же знак, что и первое удаленное слагаемое.

247. Разбиение конечного множества называется правильным, если все множества разбиения содержат одинаковое число элементов. Найти число правильных разбиений n-элементного множества.

248. Пусть во множестве A — n элементов, в B — m элементов. Сколько существует (всюду определенных)

а) функций;

б) инъекций;

в) сюрьекций;

г) биекций;

между A и B?

249. Сколько различных производных порядка k у гладкой функции n переменных?

250. Пусть $|A| = n$. Найдите число

а) всех;

б) рефлексивных;

в) антирефлексивных;

г) симметричных;

д) антисимметричных;

е) асимметричных;

ж) полных;

з) связных

бинарных отношений на A.

251. Пусть $|A| = n$. Найдите число

а) отношений эквивалентности;

б) слабых порядков;

в) линейных порядков

на A.

5.2. Вероятность

Вероятностью называется отношение числа исходов, удовлетворяющих условию задачи, к числу всех возможных исходов. Задачи этого раздела предполагают "комбинаторные" решения, т.е. вычисление обоих чисел комбинаторными методами.

Теория вероятности, красивая, глубокая и интересная наука, остается за пределами задачника.

252. Из коробки с 10 шарами, пронумерованными от 0 до 9, вынимают не глядя два шара. Какова вероятность того, что номера обоих нечетны?

Решение. Всего 100 способов упорядоченно вытащить пару шаров $(10 \cdot 10)$, из них нас устраивает 20 $(5 \cdot 4)$. Значит, вероятность равна $25/100 = 1/5$.

253. Бросают 3 монеты.

а) С какой вероятностью все монеты выпадут на одну сторону?

б) С какой вероятностью выпадет хотя бы один орел?

Решение. Каждая монета может упасть либо орлом (О) либо решеткой (Р) — 2 варианта. Поэтому всего исходов $2^3 = 8$.

В первом случае нас устраивают только 2 исхода — ООО и РРР, во втором — все исходы, кроме одного (РРР), поэтому вероятности соответственно равны $2/8 = 1/4$ и $(8-1)/8 = 7/8$.

254. Одновременно бросают 2 игральные кости.

а) Какова вероятность того, что на костях выпадет равное количество очков?

б) Какова вероятность, что число, выпавшее на первой кости, больше числа, выпавшего на второй кости?

Решение. На каждой кости может выпасть любая цифра от 1 до 6, поэтому всего исходов $6 \cdot 6 = 36$.

В первом случае нас устраивают только 6 исходов — от (1,1) до (6,6), во втором — половина оставшихся, т.е $(36-6)/2 = 15$. Вероятности соответственно равны $1/6$ и $5/12$.

255. В урне 10 шаров. Вероятность вытащить из нее два белых шара равна $\frac{2}{15}$. Сколько в урне белых шаров?

256. Имеется три ящика, в каждом из которых лежат шары с номерами от 0 до 9. Из каждого ящика вынимается по одному шару. Какова вероятность того, что

а) вынуты три шара с номером 1;

б) вынуты три шара с одинаковыми номерами?

257. В ящике имеется 10 белых и 15 черных шаров. Из ящика вынимаются 4 шара. Какова вероятность того, что все вынутые шары будут белыми?

258. Из урны, содержащей M_1 шаров с номером 1, M_2 шаров с номером 2, $\ldots$, M_N шаров с номером N, случайно без возвращения выбирается n. Найти вероятность того, что появилось m_1 шаров с номером 1, m_2 шаров с номером 2, $\ldots$, m_N шаров с номером N.

259. n различных шаров случайно размещаются по m ящикам. Найти вероятность того, что **а**) хотя бы один ящик содержит ровно k шаров. **б**) хотя бы один ящик окажется пустым.

260. n элементов расположены в некотором (фиксированном) порядке. Случайным образом они переставляются. Найти вероятность того, что хотя бы один элемент окажется на своем месте.

261. Монету бросают 100 раз подряд. Какова вероятность того, что

а) выпадет ровно 50 орлов;

б) орлов выпадет больше, чем решеток;

262. Одновременно бросают 2 кости.

а) Какая сумма будет выпадать чаще — 5 или 6?

б) Какое самое вероятное значение суммы выпавших очков?

263. Одновременно бросают 3 кости. Какова вероятность того, что

а) на всех костях выпадут одинаковые числа;

б) все числа на костях разные;

в) выпало ровно два одинаковых числа?

264. Одновременно бросают 6 игральных костей. Какова вероятность того, что сумма очков на костях меньше 8?

265. **Парадокс де Мере.** Имеются 3 игральные кости. Почему число 11 в сумме выпадает чаще, чем 12, хотя оба разбиваются в сумму 6 способами: $11 = (6{+}4{+}1, 6{+}3{+}2, 5{+}5{+}1, 5{+}4{+}2, 5{+}3{+}3, 4{+}4{+}3)$, $12 = (6{+}5{+}1, 6{+}4{+}2, 6{+}3{+}3, 5{+}5{+}2, 5{+}4{+}3, 4{+}4{+}4)$?

266. Какое из событий более вероятно:

а) появление по крайней мере одной шестерки при бросании 6 костей;

б) появление хотя бы двух шестерок при бросании 12 костей;

в) появление не менее трех шестерок при бросании 18 костей?

267. Какое наименьшее число раз нужно:

а) бросить монету, чтобы вероятность появления хотя бы одного орла была больше $\frac{1}{2}$;

б) бросить игральную кость, чтобы вероятность появления хотя бы одной шестерки была больше $\frac{1}{2}$;

в) вытянуть карту из колоды (без возвращения), чтобы вероятность появления хотя бы одного туза была больше $\frac{1}{2}$?

268. Какова вероятность того, что при игре в домино вы не получите при раздаче ни одного дубля (каждый из четырех игроков получает по 7 доминошек)?

269. Из 28 костей домино случайно выбираются две. Найти вероятность того, что из них можно составить цепочку согласно правилам игры.

270. Среди билетов лотереи половина выигрышных. Сколько билетов надо купить, чтобы вероятность хоть что-то выиграть была больше 0,95?

271. **Спортлото.** В лотереях «5 из 36» и «6 из 45» необходимо отметить на карточке 5(6) чисел из 36(45). Во время тиража также выбирается 5(6) чисел из 36(45). Карточка выигрывает, если из не менее 3(4) отмеченных чисел совпадает с выпавшими при тираже. Причем, чем больше чисел совпадет, тем больше приз. Вычислить вероятность совпадения

а) 3, 4 и 5 чисел в лотерее «5 из 36»;

б) 4, 5 и 6 чисел в лотерее «6 из 45».

в) Участник лотереи «6 из 45» на первой карточке отметил номера $(4, 12, 20, 31, 32, 33)$, а на второй — $(4, 12, 20, 41, 42, 43)$. Найти вероятность того, что участник получит ровно два минимальных выигрыша.

272. В классе 30 учеников. Докажите, что вероятность того, что у каких-нибудь двух учеников совпадают дни рождения, составляет больше 50 процентов.

273. Какова вероятность, что в компании из 12 человек все дни рождения придутся на разные месяцы года?

274. В классе 10 мальчиков и 10 девочек.

а) Их случайным образом рассадили за 10 парт. Какова вероятность того, что за каждой партой оказались мальчик и девочка?

б) По жребию разыгрывают 10 билетов на концерт. Какова вероятность того, что на концерт пойдет одинаковое число мальчиков и девочек?

275. На один ряд из $2n$ мест рассаживаются в случайном порядке n мальчиков и n девочек. Какова вероятность того, что

а) Петя и Маша будут сидеть рядом;

б) все девочки будут сидеть рядом?

276. За круглый стол рассаживаются в случайном порядке n мальчиков и n девочек. Какова вероятность того, что

а) Петя и Маша будут сидеть рядом;

б) их можно разбить на n непересекающихся пар так, чтобы каждая пара состояла из сидящих рядом мальчика и девочки;

в) никаких два мальчика и никакие две девочки не окажутся рядом?

277. Кодовой замок имеет 10 кнопок с цифрами от 0 до 9 и открывается одновременным нажатием на определенные три кнопки. Какова вероятность, что человеку, не знающему код, удастся открыть его с первого раза?

278. Замок на сейфе открывается набором определенной комбинации из 5 цифр от 0 до 9 (при этом учитывается порядок цифр в комбинации). С какой вероятностью мы откроем сейф в течение часа, если будем тратить на набор каждой новой комбинации около секунды?

279. В шкафу находится 5 пар ботинок различных размеров. Из них случайно выбирают 4 ботинка. Найдите вероятность того, что среди выбранных ботинок нет парных.

280. Двое делят пополам 10 конфет, две из которых с сюрпризом. Найдите вероятности того, что первому достанется **а**) 0; **б**) 1; **в**) 2 конфеты с сюрпризом.

281. В теннисном турнире участвуют 8 игроков. Предположим, что лучший игрок всегда побеждает второго по мастерству, а тот в свою очередь побеждает всех остальных. Проигрывающий в финале занимает второе место. Какова вероятность того, что это место займет второй по мастерству игрок?

282. В теннисном турнире участвуют 8 равных по силе игроков, среди которых два близнеца. Порядок состязания определяется жребием.

а) Какова вероятность того, что они встретятся между собой?

б) Каков ответ в случае 2^n игроков?

283. Найдите вероятность того, что упорядоченная выборка без возвращения объема k из N различных элементов содержит заданный элемент.

284. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

285. В записанном телефонном номере $135-3*-**$ три последние цифры стерлись.

Найдите вероятность того, что:

а) стерлись различные цифры, отличные от 1,3,5;

б) стерлись одинаковые цифры;

в) две из стершихся цифр совпадают.

286. Какова вероятность того, что у четырехзначного номера случайно взятого автомобиля в большом городе:

а) только две одинаковые цифры;

б) две пары одинаковых цифр;

в) только три одинаковые цифры;

г) все цифры разные;

д) все цифры одинаковые;

е) нет ни одной пятерки?

287. Из совокупности всех подмножеств множества из n элементов по схеме выбора с возвращением выбираются **а**) два; **б**) k подмножеств. Найти вероятность того, что они попарно не пересекаются.

288. Многие москвичи считали билет с четырех(шести)значным номером счастливым, если сумма первых двух (трех) цифр равна сумме последних двух (трех). Примета советовала при получении счастливого билета немедленно его съесть. Сколько существует **а**) четырехзначных; **б**) шестизначных счастливых билетов? Найдите вероятность получить счастливый билет.

289. Из карточек разрезной азбуки составлено слово СТАТИСТИКА. Из этих 10 карточек случайно выбрано 5. Найдите вероятность того, что из отобранных карточек можно составить слово ТАКСИ.

290. Из множества чисел $\{1, 2, \ldots, \}$ по схеме выбора без возвращения выбираются три числа. С какой вероятностью первое число окажется между вторым и третьим?

291. Десять рукописей разложены по 30 папкам (на одну рукопись 3 папки). Найдите вероятность того, что в случайно выбранных 6 папках не содержится целиком ни одной рукописи.

292. В зале кинотеатра в первых двух рядах, каждый из которых состоит из N кресел, сидит n человек. Найдите вероятности следующих событий:

а) в первом ряду никакие 2 человека не сидят рядом;

б) во втором ряду каждый человек имеет ровно одного соседа;

в) в первом ряду из любых двух кресел, расположенных симметрично относительно середины ряда, хотя бы одно свободно.

5.3. Карты

293. Из колоды в 36 карт одну за другой вытягивают две карты. Какова вероятность того, что они одного цвета?

а) Выбор без возвращения.

б) Выбор с возвращением.

294. Колоду из 36 карт раздают на двоих. Какова вероятность, что тузов у них окажется поровну?

295. Колода из 36 карт хорошо перемешана (т.е. все возможные расположения карт равновероятны). Найти вероятность того, что все четыре туза окажутся рядом.

296. Сколькими способами можно сдать 6 карт из 36 так, чтобы среди них был

а) ровно один туз;

б) ровно два туза;

в) ровно два туза и один король;

г) хотя бы один туз;

д) не менее двух тузов;

е) ровно один туз и не менее одного короля;

ж) два туза и не менее двух королей?

297. Сколькими способами можно выбрать 4 карты из колоды в 52 карты так, чтобы среди выбранных карт была

а) ровно одна дама;

б) ровно одна дама красной масти?

298. **Покер.** Имеется колода из 52 карт, по 13 карт каждой масти. Подсчитать, сколькими способами можно выбрать 5 карт так, что среди них окажутся:

а) "Royal Flush": пять последовательных карт одной масти;

б) "Каре": четыре карты из пяти одного достоинства;

в) "Flush": пять карт одной масти;

г) "Full house" или "3+2": три карты одного достоинства и две другого;

д) "Straight": пять последовательных карт;

е) "3": три карты одного достоинства;

ж) "2+2": две пары карт одного достоинства;

з) "2": пара карт одного достоинства;

и) Вычислите вероятность перечисленных событий.

Преферанс

299. При игре в преферанс каждому из трех игроков раздают по 10 карт, а две карты кладут в прикуп. Сколько различных раскладов возможно в этой игре? (Считаются возможные раздачи без учета того, что каждые 10 карт достаются конкретному игроку.)

300. Найти вероятность того, что в прикупе 2 туза.

301. Пусть играющий имеет 5 старших карт масти, исключая даму. Найти вероятность того, что у одного из противников "третья дама".

302. У игрока в преферанс оказалось 4 козыря, а еще 4 находятся на руках у двух его противников. Какова вероятность того, что козыри лягут **а**) $2:2$; **б**) $3:1$; **в**) $4:0$?

5.4. Шахматы

В этом параграфе выражение "фигуры угрожают друг другу" (фигуры бьют друг друга) подразумевает, что поля, на которых они расположены, связаны между собой ходом этой фигуры независимо от цвета фигур.

303. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного короля, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

304. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга **а**) две ладьи; **б**) двух королей; **в**) двух слонов; **г**) двух коней; **д**) двух ферзей?

305. Найдите вероятность того, что случайным образом поставленные на шахматную доску **а**) две ладьи; **б**) два короля; **в**) два слона; **г**) два коня; **д**) два ферзя не бьют друг друга.

306. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску

а) белую и черную ладьи;

б) 6 белых ладей;

в) 4 белых и 2 черных ладьи;

г) 8 белых ладей?

307. Сколькими способами можно расставить n мирных ладей на доске $n \times n$, если k из них — белые и $n - k$ — черные?

308. Найти вероятность того, что при случайной расстановке k $(2 \leq k \leq 8)$ ладей на шахматной доске никакие две ладьи не будут угрожать друг другу. При каких k эта вероятность меньше 1/2? Меньше 1/100?

309. Сколькими способами можно расставить n ладей на доске $n \times n$ так, чтобы они держали под обстрелом все поля доски?

310. Докажите, что число способов поставить на шахматную доску максимальное число не бьющих друг друга слонов есть квадрат целого числа.

311. Какое максимальное число слонов можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

312. **а**) Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматной доски комплект белых фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня); **б**) а если не забывать, что слоны должны стоять на полях разного цвета?

5.5. Разные задачи

313. Световое табло состоит из нескольких лампочек, каждая из которых может находиться в двух состояниях (гореть или не гореть). На пульте несколько переключателей; переключение каждого из них приводит к изменению состояния группы лампочек (каждому переключателю соответствует своя группа). Вначале лампочки не горят.

а) Доказать, что число возможных состояний табло есть степень 2.

б) Найти это число, если табло есть прямоугольник $m \times n$, а переключателей $m + n$ (соответствующих m строкам и n столбцам).

314. Выбраны 6 различных цветов; требуется раскрасить 6 граней куба, каждую в особый цвет из числа избранных. Сколькими геометрически различными способами можно это сделать? Геометрически различными называются две такие расцветки, которые нельзя совместить одну с другой при помощи вращений куба вокруг его центра.

Решить ту же задачу для случая раскраски граней правильного двенадцатигранника в двенадцать различных цветов.

315. На фабрике игрушек два цеха. В первом цеху автомат производит кубики с ребром 1 см, одинаковые и одинаково покрашенные шестью красками так, что все грани имеют разные цвета. Кубики сваливают в коробки, где они ориентированы случайно. Во втором цеху из этих кубиков склеивают параллелепипеды с ребрами 1 см, 1 см, 2 см. Сколько видов готовой продукции производит фабрика? (Два параллелепипеда считаются одинаково раскрашенными, если можно так расположить их в пространстве, что одинаково расположенные грани окрашены одинаково.)

316. **а**) Какое число различных ожерелий длины n можно составить из n различных камней (ожерелья, полученные поворотами из данного ожерелья, считаются одинаковыми)?

б) Какое число различных ожерелий длины n (n — простое число) можно составить из k различных типов камней? (ожерелья, полученные поворотами из данного ожерелья, считаются одинаковыми)

в) Предположим теперь, что ожерелье можно не только поворачивать, но еще и переворачивать. Как изменится ответ в пункте а)?

317. Пусть p — простое число. Сколько существует способов раскрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Раскраски, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми.) Получите формулу и выведите из нее малую теорему Ферма: Пусть p — простое число и a не делится на p. Тогда $a^{p-1}-1$ делится на p.

318. За круглым столом были приготовлены 12 мест для жюри с указанием имени на каждом месте. Николай Николаевич, пришедший первым, по рассеянности сел не на свое, а на следующее по часовой стрелке место. Каждый член жюри, подходивший к столу после этого, занимал свое место или, если оно уже было занято, шел вокруг стола по часовой стрелке и садился на первое свободное место. Возникшее расположение членов жюри зависит от того, в каком порядке они подходили к столу. Сколько может возникнуть различных способов рассадки жюри?

319. На окружности отмечено несколько точек, A — одна из них. Каких выпуклых многоугольников с вершинами в этих точках больше: содержащих точку A или не содержащих ее? На сколько?

320. Докажите, что число неравных треугольников с вершинами в вершинах правильного n-угольника равно ближайшему к $n^2/12$ целому числу.

321. Нарисуйте на плоскости 6 точек так, чтобы они служили вершинами ровно для 17 треугольников.

322. Имеется 2000 точек. Какое максимальное число троек можно из них выбрать так, чтобы каждые две тройки имели ровно одну общую точку?

323. В круге проведено m хорд, которые пересекаются внутри круга в n точках (в каждой точке по 2 хорды). На сколько частей они делят круг?

324. На книжной полке стоят 30 томов энциклопедии в некотором порядке. За одну операцию разрешается менять местами любые два соседних тома. За какое наименьшее число операций можно гарантированно выстроить все тома в правильном порядке (с первого по тридцатый слева направо) независимо от начального положения?

325. **Головоломка "Ханойская башня"** представляет собой 8 дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Задача состоит в том, чтобы переместить всю башню на один из других колышков, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший.

а) Докажите, что эта головоломка имеет решение. Какой способ решения головоломки будет оптимальным (по числу перемещений)?

б) Занумеруем колышки числами 1, 2, 3. Предположим, что требуется переместить диски с 1-го колышка на 3-й. Сколько понадобится перекладываний, если прямое перемещение диска с 1-го колышка на 3-й запрещено?

в) Сколько понадобится перекладываний, если в условии предыдущего пункта добавить дополнительное требование: первый диск нельзя класть на второй колышек?

326. Петя поднимается по лестнице из 10 ступенек. За один раз он прыгает либо на одну ступеньку, либо на две ступеньки. Сколькими способами Петя сможет подняться по лестнице?

327. Сколько существует 7-значных чисел, составленных из цифр 1 и 2, в которых никакие две единицы не стоят рядом?

328. Архитектор хочет расположить 7 высотных зданий так, чтобы, гуляя по городу, можно было увидеть их шпили в любом (циклическом) порядке. Удастся ли это ему?

329. Имеется 5 одинаковых с виду замков и 5 похожих ключей.

а) Сколько попыток надо сделать, чтобы установить, какой замок открывается каким ключом?

б) Тот же вопрос, но замков 7, а ключей 10;

в) Тот же вопрос, но среди замков два абсолютно одинаковые (и ключи к ним одинаковые).

330. Вычислить

а) $\sum_{i,j=1}^{n} max(i,j)$;

б) $\sum_{i,j=1}^{n} min(i,j)$.

331. Сколькими способами можно разменять 20 копеек монетами достоинством в 5, 2 и 1 копейку?

332. На конгресс собрались по 5 представителей от каждой из 100 компаний. Сколько способов сформировать комитет из 25 представителей, в который входит не более чем по одному представителю от каждой компании? Сколько способов сформировать комитет из 25 представителей, в который входит не более чем по три представителя от каждой компании?

333. В классе 34 ученика, которые сидят за 17 партами. После каждого месяца учитель пересаживает их так, чтобы за каждой партой сидели двое, никогда до этого рядом не сидевшие. Какое наибольшее число месяцев учитель сможет это делать?

334. Докажите, что количество всех цифр в последовательности $1, 2, 3, 4, \ldots, 1000$ равно количеству всех нулей в последовательности $1, 2, 3, 4, \ldots, 10000$.

335. Подсчетом количества упорядоченных пар непустых деревьев с выделенным корнем, имеющих в сумме n вершин, докажите равенство

$$2(n-1)n^{n-2} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1}(n-k)^{n-k-1}.$$

336. Пусть $a(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — число таких деревьев с n вершинами, что каждая вершина i имеет степень d_i. Доказать, что

$$a(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}.$$

Используя полученную формулу, докажите формулу для числа деревьев с n вершинами.

337. В классе n учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на свое место?

338. В аудитории n мест. Экзамен по математике сдавало m студентов $(m \leq n)$. Пытаясь изменить результат, на следующем экзамене каждый студент решил не садиться на место, на котором сидел в прошлый раз. Сколько у студентов есть способов пересесть?

Ответы, указания, решения

Глава 1

8. а) Выберем чашку. В комплект к ней можно выбрать любое из трех блюдец. Поэтому есть 3 разных комплекта, содержащих выбранную чашку. Поскольку чашек всего 5, то число различных комплектов равно 15.

б) Выберем любой из 15 комплектов предыдущей задачи. Его можно дополнить ложкой четырьмя различными способами. Поэтому общее число возможных комплектов равно 60.

в) Возможны три разных случая: первый — покупаются чашка с блюдцем, второй — чашка с ложкой, третий — блюдце и ложка. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных вариантов (в первом — 15, во втором — 20, в третьем — 12). Складывая, получаем общее число возможных вариантов: 47.

9. $20 = 5 \cdot 4$.

10. 3.

11. $18 = 3 \cdot 6$.

12. $70 = 7 \cdot 5 \cdot 2$.

13. 3^6.

14. $500 = 20 \cdot 20 + 10 \cdot 10$.

15. 1. Упорядоченный выбор без возвращения. В этом случае выборки K, K, K, C и K, C, K, K — различные. Задача эквивалентна задаче о числе слов длины 4, которые можно получить из трех букв K и четырех букв C или задаче о подсчете 4-перестановок, которые можно получить из мультимножества $M = \{K^3, C^4\}$. Отметим, что каждое такое слово или перестановка однозначно определяется непустым подмножеством S множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Подмножество S содержит номера мест, на которых стоят символы C. Подмножество S не пусто, так как количество вынутых красных шаров ограничено тремя. Количество непустых подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4\}$, а вместе с ним и количество способов упорядоченного выбора без возвращения 4 шаров равно $2^4 - 1$.

2. Неупорядоченный выбор без возвращения. В этом случае существенно лишь количество вынутых красных и синих шаров. Каждая выборка есть монотонное слово длины 4, составленное из символов множества M или 4-подмножество множества M. Имеем всего 4 возможные выборки: C^4, C^3K, C^2K^2, CK^3.

3. Упорядоченный выбор с возвращением. Каждая выборка — слово длины 4 в алфавите из $\{K, C\}$ из двух символов. Количество слов, а вместе с ним и количество

различных выборок есть 2^4.

4. Неупорядоченный выбор с возвращением. Имеем 5 возможных выборок: C^4, C^3K, C^2K^2, CK^3, K^4.

16. а) Цвет для верхней полоски флага можно выбрать шестью разными способами. После этого для средней полоски флага остается пять возможных цветов, а затем для нижней полоски флага — четыре различных цвета. Таким образом, флаг можно сделать $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ способами.

б) $6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 = 150$.

17. $2^{10} = 1024$.

18. На первое место можно положить любой из четырех шариков, на второе — любой из трех оставшихся, на третье — любой из двух оставшихся, а на четвертое — последний оставшийся шарик. Итак, ответ: $4! = 24$.

19. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

20. 3^{13}.

21.а) Сначала найдем, сколько чисел от 000000 (будем считать, что в начеле менее, чем 6-значных чисел стоят нули) до 999999 не содержат в записи единицы. На любом из 6 мест может стоять любая цифра, кроме 1 (9 вариантов), поэтому таких чисел 9^6. Среди первого миллиона не встречается 0, который мы посчитали (а 1000000 учитывать не нужно, т.к. в его десятичной записи есть единица). Поэтому правильный ответ — $9^6 - 1$. Единицу в десятичной записи содержат остальные числа, поэтому их $10^6 - 9^6 + 1$. Чтобы сравнить эти числа, проще сравнить одно из них с половиной миллиона. $9^6 - 1 = 531440 > 500000$, поэтому среди первого миллиона больше чисел, не содержащих 1 в десятичной записи.

б) Аналогично, $9^7 - 1 = 4782968 < 5000000$, поэтому среди первых 10 миллионов больше уже чисел, содержащих в десятичной записи 1.

22. Каждая из 4 клеток может быть покрашена двумя различными цветами, поэтому всего вариантов 2^4.

23. 3^7.

24. Выделим два случая: путь проходит через город Б или через город Г. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных маршрутов: в первом — 24, во втором — 4. Складывая, получаем общее количество маршрутов: 28.

25. $10^5 \cdot 33^3$.

26. а) 10^7; **б**) $10^7 - 5^7$; **в**) $[10]_7$.

27. а) 5^5; **б**) $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5$; **в**) $5^5 - 5!$.

28. $6^5 \cdot 8^4 + 6^4 \cdot 8^5$.

29. Заметим, что однобуквенных слов 26 (столько же сколько и букв в английском алфавите), двубуквенных — 26^2, трехбуквенных — 26^3, четырехбуквенных — 26^4. Теперь определим, какое по счету слово cbcad. Пятибуквенных слов, начинающихся с a или b — $2 \cdot 26^4$, слов $caxxx$ (где x — любая буква) — 26^3, слов, начинающихся на cba или cbb — $2 \cdot 26^2$, слов, начинающихся на $cbca$ и расположенных выше $cbcad$ — 3. Значит, слово $cbcad$ расположено на $26 + 26^2 + 26^3 + 26^4 + 2 \cdot 26^4 + 26^3 + 2 \cdot 26^2 + 3 + 1$ месте.

30. $33^4 - 23^4$.

31. $33!$.

32. Последовательностей менее чем из 5 значков существует $2 + 4 + 8 + 16 = 30$.

33. $5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 325$.

34. $6^3 - 5^3$.

35. $2^{10} = 1024$.

36. $2^7 = 128$.

37. $17!$.

38. $200 + 200^2 + 200^3$.

39. Выберем произвольный порядок вершин (это можно сделать $n!$ способами) и проведем ломаную в этом порядке — из 1-й вершины во 2-ю, из 2-й в 3-ю,$\ldots$, из n-й в 1-ю. Но для любой замкнутой ломаной существует n способов начать ее строить и 2 способа ее рисования (в прямом и обратном направлении). Поэтому существует только $n!/2n = (n-1)!/2$ ломаных.

40. Количество дней равно, очевидно, количеству различных наборов из 6 блюд. Для каждого блюда есть две возможности — быть выбранным или невыбранным, и эти возможности могут всевозможным образом комбинироваться. Поэтому количество дней равно $2^6 = 64$. Далее, каждому набору блюд можно сопоставить противоположный набор, состоящий в точности из тех блюд, которых нет в исходном наборе. Вместе в исходном и в противоположном наборе 6 блюд, значит в среднем приходится по 3 блюда на набор. Поскольку все 64 набора разбиваются на пары противоположных, то в среднем за эти 64 дня Вася съедал 3 блюда.

41. Пусть $x + y$ нечетно. Тогда искомые пары (x, y) это в точности те пары, в которых $-99 \le x + y \le 99$, $-99 \le x - y \le 99$. Таких пар $100 \cdot 100 = 10000$.

Пусть $x + y$ четно. Тогда искомые пары (x, y) это в точности те пары, в которых $-98 \le x + y \le 98$, $-98 \le x - y \le 98$. Таких пар $99 \cdot 99 = 9801$.

Всего 19801 пара.

43. $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10$.

44. **а**) $36!$; **б**) $2 \cdot (18!)^2$; **в**) $4! \cdot (9!)^4$.

45. $9 \cdot 10^9 - 9 \cdot 9!$.

46. Выпишем все цифры в порядке убывания: 9876543210. Чтобы получить девятизначное число, нужно убрать одну цифру. Это можно сделать 10 способами.

47. **а**) 10^5; **б**) $9 \cdot 10^4 \cdot 2$; **в**) $6!$;

г) Найдем сначала количество возможностей поставить цифры 2 и 4. Двойка может стоять на шести местах. Если двойка стоит на первом или шестом месте, то имеется 4 возможности поставить цифру 4. Если двойка стоит на месте со второго по 5-е, то имеется 3 возможности поставить цифру 4. Итого, имеется $4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 20$ возможностей поставить цифры 2 и 4. Для каждого варианта расстановки двойки и четверки остальные цифры можно поставить произвольным образом на 4 оставшихся места — всего $4! = 24$ возможностей. Таким образом, всего имеется $20 \cdot 24 = 480$ возможностей расставить цифры указанным в условии образом.

д) 7^6; **е**) $[7]_6$; **ж**) $9 \cdot 10^4 \cdot 5$; **з**) $4 \cdot 5^5$; **и**) $4 \cdot 5^5 + 5^6$;

к) Вместо того, чтобы подсчитывать количество требуемых 6-значных чисел, определим количество 6-значных чисел, не обладающих нужным свойством. Так как это в точности те числа, в записи которых встречаются только нечетные цифры, то их количество, равно 5^6. Всего 6-значных чисел 900000. Поэтому количество 6-значных чисел, обладающих указанным свойством, равно $900000 - 5^6 = 900000 - 15625 = 884375$.

л) $9 \cdot 9!/4!$; **м**) $5 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$; **н**) $9 \cdot 10^2$; **о**) $9 + 9 \cdot 5 + 9 \cdot 8 \cdot 6$; **п**) $2^6 = 64$; **р**) $8 \cdot 9^5$; **с**) $9 \cdot 10^5 - 8 \cdot 9^5$; **т**) $9^5 + 5 \cdot 9^4 \cdot 8$; **у**) $4 \cdot 4^4 = 4^5$. Указание: переберите возможные варианты двух последних цифр. **ф**) $8 \cdot 4!$.

48. $10 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + 9^6$.

49. Число $x^2 + y^2$ делится на 7 тогда и только тогда, когда оба числа x и y делятся на 7. Действительно, квадрат целого числа при делении на 7 дает остатки 0, 1, 2 и 4. Количество целых чисел, заключенных между 1 и 1000 и делящихся на 7, равно 142. Поэтому искомое число равно $142^2 = 20164$.

50. а) 32;

б) Каждое из чисел может входить в разложение делителя в любой степени от 0 до 10, от 0 до 15 и от 0 до 20 соответственно. Ответ: $11 \times 16 \times 21$.

в) $3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^6 \cdot 111 = 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^6 \cdot 37$; все числа 3, 5, 7, 37 — простые. Следовательно, делителями будут все числа $3^k \cdot 5^l \cdot 7^m \cdot 111^n$, где $0 \geq k \geq 5$, $0 \geq l \geq 2$, $0 \geq m \geq 6$, $0 \geq n \geq 1$. Степени k, l, m, n выбираются независимо, поэтому ответ $6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 = 252$.

г) $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10}$. Аналогично имеем $11 \cdot 11 = 121$ делитель.

51. Число $20^{13} = 2^{26} \cdot 5^{13}$ имеет $27 \cdot 14 = 378$ делителей. 201 число простое, поэтому у 201^3 всего 4 делителя.

52. Общее решение см. в последнем пункте. Ответы: **а**) 4; **б**) 6; **в**) 9; **г**) $(m+1)\cdot(k+1)$;

д) Каждый множитель может входить в делитель в одной из своих степеней, т.е. от 0 до m_i — m_i+1 вариант. Чтобы задать делитель, достаточно задать степени, в которых в него входят $p_1, \ldots, p_m$. Поэтому по правилу произведения число $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_n^{m_n}$ имеет $(m_1 + 1) \cdot (m_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (m_n + 1)$ делителей.

53. а) Разобьем все числа на пары: 1 и 99999, 2 и 99998, 3 и 99997,…, 49999 и 50001. Без пары останется 50000, а сумма чисел в каждой паре равна 100000. Поэтому сумма всех цифр равна $100000 \cdot 49999$ (число пар) $+50000 = 4999950000$. По легенде это рассуждение в 9-летнем возрасте придумал великий немецкий математик К.Ф. Гаусс (1777—1855). Также можно воспользоваться формулой для суммы арифметической прогрессии (или вывести ее таким способом).

б) Всего 90000 пятизначных чисел, половина (т.е. 45000) из них нечетна. Также как и в предыдущей задаче, их можно разбить на 22500 пар, сумма чисел в каждой из которых равна $10001 + 99999 = 110000$. Значит, сумма всех нечетных пятизначных чисел равна $110000 \cdot 45000 = 4950000000$.

в) Всего таких чисел $2^5 = 32$. Их можно разбить на 16 пар, отличающиеся в каждом из разрядов (например, в одну пару попадут числа 12122 и 21211). Сумма чисел в каждой паре равна 33333, поэтому сумма всех чисел равна $33333 \cdot 16 = 533328$.

г) Таких чисел 5^5. Их можно разбить на пары, объединив с числом $\overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}$ число $\overline{(10 - x_1)(10 - x_2)(10 - x_3)(10 - x_4)(10 - x_5)}$ (например, в одну пару попадут числа 13753 и 97357). Без пары останется только число 55555, т.е. сумма чисел в любой паре равна $111110 = 55555 * 2$, поэтому среднее арифметическое всех чисел равно 55555 и их сумма равна $55555 \cdot 5^5 = 173609375$.

д) Всего имеется $5! = 120$ способов переставить цифры в числе 12345. Среди этих способов ровно в пятой части (т.е. в 24 случаях) цифра 1 стоит на первом месте. То же самое справедливо для любой цифры и любого места. Поэтому искомая сумма равна

$24(10000+1000+100+10+1+20000+2000+200+20+2+30000+3000+300+30+3+40000+4000+400+40+4+50000+5000+500+50+5) = 24(11111+22222+33333+44444+55555) = 24 \cdot 11111 \cdot (1+2+3+4+5) = 3999960$.

е) Таких чисел $6 \cdot 7^4$, поскольку на первом месте не может стоять 0. На первом месте может стоять любая из цифр $1 \dots 6$, причем каждая из них встречается одно и то же число раз, т.е. $6 \cdot 7^4/6 = 7^4$. На втором и последующих местах может стоять любая из 7 цифр, поэтому каждая из них встречается $6 \cdot 7^4/7 = 6 \cdot 7^3$ раз.

Итак, сумма всех чисел равна $10000 \cdot 7^4 \cdot (1+2+3+4+5+6) + (1000+100+10+1) \cdot 6 \cdot 7^3 \cdot (0+1+2+3+4+5+6) = 7^3 \cdot 21 \cdot (70000+6666) = 552225198$.

54. а) Первую можно раскрасить 6 цветами, вторую — 5, далее 4, 3, 2. Каждую следующую можно раскрасить двумя способами. Ответ: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^{96}$.

55. а) Для букета есть 4 способа выбрать гвоздику (ничего не выбрать, взять 1, 2 или 3), 5 способов выбрать розу и 6 способов выбрать тюльпан. По правилу произведения получаем $4 \cdot 5 \cdot 6 - 1$ (букет из 0 цветов не считается) способов выбрать букет.

б) Различных букетов из гвоздик 3 (от 1 до 3 гвоздик), из роз — 4, из тюльпанов — 5. Поэтому всевозможных букетов $12 = 3 + 4 + 5$.

в) В букете может быть 1 или 3 гвоздики, 1 или 3 розы, 1, 3 или 5 тюльпанов. Всего $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ вариантов.

г) Букетов из нечетного числа цветов ровно половина от числа всех букетов, поскольку можно построить взаимно-однозначное соответствие между "четными" и "нечетными" букетами. Именно, букету из x гвоздик, y роз и z тюльпанов можно сопоставить букет из $3 - x$ гвоздик, y роз и z тюльпанов. Поэтому "нечетных" букетов будет $120/2 = 60$.

д) Вычтем из числа всех букетов число букетов, состоящих менее, чем из 3 цветов, т.е. букеты из 1 цветка (их 3 штуки), букеты из 2 цветов (их 6 штук: 3 букета, состоящие из одинаковых цветов и 3 — из разных). Ответ: $119 - 3 - 6 = 110$.

56. а) 8^{12}; **б**) $[12]_8$.

57. Каждый прямоугольник однозначно определяется своим левым нижним и правым верхним углами.

Ответ: $pq(n-p+1)(n-q+1)$.

58. а) $7! \cdot 3!$; **б**) $10!/2$; **в**) $10! - 2 \cdot 9!$.

59. Рассмотрим две возможности. 1) Одно из чисел равно 2000. Тогда другое число может быть равно любому делителю d числа 2000. Поскольку $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, число d должно иметь вид $d = 2^k \cdot 5^l$, где k может принимать 5 значений 0,1,2,3,4. и независимо от этого l может принимать 4 значения 0,1,2,3. Таким образом, для числа d имеется $5 \cdot 4 = 20$ возможностей. 2) Ни одно из двух данных чисел a, b, не равно 2000. Тогда в разложении одного из чисел a, b (для определенности, a) на простые сомножители должен присутствовать множитель 2 в четвертой степени, а в разложении другого должен присутствовать множитель 5 в третьей степени. Таким образом, $a = 2^4 \cdot 5^m$; $b = 2^n \cdot 5^3$, где m может принимать 3 значения 0,1,2, и независимо от этого n может принимать 4 значения 0,1,2,3 (поскольку a и b — делители числа 2000 и не равны 2000). Таким образом, в этом случае имеется $3 \cdot 4 = 12$ возможностей. Окончательно получаем, что имеется 20+12=32 пары натуральных чисел, имеющих НОК, равное 2000.

60. Если хотя бы 2 грани буду выкрашены в один цвет, то все цвета использовать не удастся. Значит, необходимо использовать одну краску на одну грань, отсюда ответ $6! = 720$.

61. Общее количество циклических размещений есть $10!/10 = 9!$. Это можно доказать двумя путями.

1. Количество различных перестановок 10 элементов равно $10!$. Но 10 циклических перестановок каждой из них дают одно и то же циклическое размещение, поэтому количество различных циклических размещений в 10 раз меньше и равно $10!/10 = 9!$.

2. Представим каждое циклическое размещение в виде обычной перестановки, начинающейся, например, с 0. Количество таких перестановок равно $9!$.

Представим каждое циклическое размещение в виде обычной перестановки, начинающейся, например, с 0. Тогда циклические размещения, в которых 0 и 9 находятся напротив друг друга, есть перестановки, в которых 0 стоит на первом месте, а 9 — на шестом. Количество таких перестановок равно $8!$. Количество циклических размещений равно $9! - 8! = 8 \cdot 8! = 332\,560$.

62. Вычтем из всех рассадок, в которых A сидит во главе стола (их $14!$) те, в которых B сидит рядом с A. Посадить B рядом с A можно 2 способами, а разместить оставшиеся 13 человек можно $13!$ способами. Ответ: $14! - 2 \cdot 13!$.

63. $11!$.

64. $2 \cdot 5! \cdot 5!$.

65. $6!$.

66. $[10]_3 = 720$.

67. $2 \cdot 9!$.

68. 9^4.

69. $3! \cdot (4 \cdot 3) \cdot 6 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6)$.

70. Ответ: $3^n \cdot 2^{n-1} = 6^n/2$.

72. Естественно, что размещения, отличающиеся порядком книг на полках, считаются различными.

Искомые размещения есть упорядоченные размещения 20 различных объектов по 5 различным ячейкам, поэтому их количество равно $[5]^{20} = 5 \cdot \ldots \cdot 24$.

Первую книгу можно разместить 5 способами. Вторую книгу можно разместить 4 способами на одной из пустых полок и поместить ее справа или слева от первой книги — 6 способов. Третью книгу можно разместить 7 способами, независимо от расположения первых двух книг и т.д. Это дает $5 \cdot \ldots \cdot 24$ способов размещения всех 20 книг.

73. Вариантов оценок $4^3 = 64 < 65$.

74. 2^{32} человек.

75. $[9]_4$.

76. Число 1001 разлагается в следующее произведение простых множителей: $1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$. Имеет смысл предположить, что варианты отдыха складываются из 3 независимых выборов: один из множества размера 13, другой из множества размера 11, третий — из множества размера 7. Можно предположить, например, что агентство предлагает 7 видов отдыха в 13 странах продолжительностью от 1 до 11 дней.

77. Подсказка. Найдите число способов поставить фишки на поля одного цвета и на поля разных цветов. Ответ: нет.

78. Если у каждой девочки будет по васильку и по 3 маргаритки, то ему нужно распределить 13 васильков и 4 маргариток, т.е. разбить каждый вид цветов на 2 набора. Это можно сделать $14 \cdot 5 = 70$ способами.

Глава 2

85. $\binom{7}{4} = 35$.

86. $\binom{10}{3} = 120$.

87. Чтобы разбить $2n$ человек на пары, можно сначала их упорядочить ($(2n)!$ способами), затем объединить в пары первого и второго, третьего и четвертого,... Таким способом каждое разбиение на пары учитывается $n! \cdot 2^n$ раз, поскольку неважны порядок пар и порядок в каждой из n пар. Ответ: $\frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}$.

88. а) $4 \cdot \binom{48}{5}$; **б**) Перейдите к дополнению: $\binom{52}{6} - \binom{48}{6}$;

в) Число 6 представляется в виде суммы четырех натуральных слагаемых двумя способами: $6 = 1+1+1+3 = 1+1+2+2$. Ответ: $4 \cdot \binom{13}{3} \cdot 13^3 + \binom{4}{2} \cdot 13^2 \cdot \binom{13}{2}^2 = 8682544$.

89. $\binom{32}{16}\binom{4}{2}/2$.

90. Поскольку порядок карт в каждой масти определен, то достаточно выбрать места, на которых лежат карты всех мастей. Места для пик можно выбрать $\binom{36}{9}$ способами. Если места для пик выбраны, места для треф можно выбрать $\binom{27}{9}$ способами, для бубей $\binom{18}{9}$ способами, а черви займут оставшиеся места. Ответ: $\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}$.

91. $153 = (18 \cdot 17)/2$.

92. $\binom{n}{2}$.

93. $n \cdot (n-3)/2$.

94. $\binom{n}{3}$.

95. а) $\binom{10}{1}\binom{11}{2} + \binom{10}{2}\binom{11}{1}$; **б**) $\binom{10}{1}\binom{11}{3} + \binom{10}{2}\binom{11}{2} + \binom{10}{3}\binom{11}{1}$.

96. $\binom{n}{2} \cdot \binom{m}{2}$.

97. Если выбрать любые пять точек, то существует выпуклый четырехугольник с вершинами в них. Остается заметить, что четверку точек можно дополнить до пятерки $n-4$ различными способами.

98. а) Выберем произвольные 4 вершины. Проведенные через них диагонали (или ребра) пересекаются только в одной точке, причем это точка пересечения диагоналей. Т.е., чтобы выбрать точку пересечения диагоналей, надо выбрать 4 вершины из n. Ответ: $\binom{n}{4}$.

б) Ответ: на $\binom{n}{4} + \frac{n(n-3)}{2} + 1$ частей. Будем поочередно проводить диагонали. Когда мы проводим новую диагональ, число частей, на которые проведенные ранее диагонали делят многоугольник, увеличивается на $m+1$, где m — число точек пересечения новой диагонали с ранее проведенными, т.е. каждая новая диагональ и каждая новая точка пересечения диагоналей увеличивают число частей на 1. Поэтому общее число частей, на которые диагонали делят n-угольник, равно $D+P+1$, где D — число диагоналей, P — число точек пересечения диагоналей. Ясно, что $D = \frac{n(n-3)}{2}$. Остается вычислить P. Любой точке пересечения диагоналей соответствуют две диагонали, концы которых задают четыре вершины n-угольника. Наоборот, четыре вершины n-угольника определяют одну точку пересечения диагоналей. Поэтому P равно количеству способов выбора четырех точек из n, т.е. $P = \binom{n}{4}$.

99. Первая точка выбирается 10 способами. На каждом следующем шаге необходимо выбирать точку, соседнюю с какой-либо уже находящейся в ломаной. Иначе, новое звено ломаной делит многоугольник на две части, в каждой из которых есть точка, которой пока нет в ломаной и их невозможно соединить, не пересекая уже проведенные звенья. Таким образом, на каждом шаге (кроме последнего) новую точку можно выбрать двумя способами. Итого $10 \cdot 2^8$. Но таким способом каждая ломаная считается 2 раза (как пройденная в обоих направлениях). Окончательный ответ: $10 * 2^7 = 1280$.

100. а) Так как все буквы слова различны, то всего можно получить 9! слов.

б) В этом слове две буквы И, а все остальные буквы разные. Временно будем считать разными и буквы И, обозначив их через И и И'. При этом предположении получится 5! разных слов. Однако те слова, которые получаются друг из друга только перестановкой букв И и И', на самом деле одинаковы. Таким образом, полученные 120 слов разбиваются на пары одинаковых. Поэтому разных слов всего 5!/2.

в) Считая три буквы А этого слова различными (А, А', А"), получим 8! разных слов. Однако слова, отличающиеся лишь перестановкой букв А, на самом деле одинаковы. Поскольку буквы А, А', А" можно переставлять 3! способами, все 8! слов разбиваются на группы по 3! одинаковых. Поэтому разных слов всего 8!/3!.

г) $\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!} = \binom{11}{5,2,2,1,1} = 83160$;

д) $\binom{18}{7,3,2,2,1,\ldots,1}$;

е) В этом случае 7 букв "О" подряд можно считать одной буквой. Ответ: $\binom{12}{3,2,2,1,\ldots,1}$

101. а) $\binom{30}{4}$; **б**) $[30]_4$. Ответы отличаются, поскольку этапы в эстафете упорядочены.

102. $7!/1!2!4! = 105$.

103. Можно расставить 16! способами 16 команд на 16 местах, после чего разбить их на пары $1-2, 3-4, \ldots, 15-16$ (команды с нечетными номерами — хозяева, с четными — гости). Но при этом каждое разбиение на пары в этих вариантах встречается 8! раз (количество способов переставить 8 пар по порядку). Таким образом, количество расписаний первого тура равно $16!/8! = 518918400$.

104. $\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \binom{8}{3}$.

105. Все определяется местами, на которых стоят гласные буквы. Ответ: $\binom{7}{3}$.

106. $\frac{(2n)!}{2^n}$.

107. $\binom{64}{12} \cdot \binom{52}{12}$.

108. Выберите сначала семьи, а потом в каждой паре конкретного представителя. Ответ: $\binom{4}{3} \cdot 2^3 = 32$.

109. $\binom{12}{5} + \binom{12}{4}\binom{10}{1} + \binom{12}{3}\binom{10}{2} + \binom{12}{2}\binom{10}{3} = 23562$.

110. $\binom{20}{6}\binom{14}{6}$.

111. $2\binom{10}{7} + \binom{10}{6}$.

112. В команду входит либо одна девочка, либо две. Разберем оба случая. Если в команде две девочки, то двух мальчиков к ним можно добавить $\binom{7}{2}$ способами. Если же в команду входит только одна девочка (ее можно выбрать двумя способами), то команду можно дополнить тремя мальчиками $\binom{7}{3}$ различными способами. Таким образом, общее число возможных команд равно $\binom{7}{2} + 2 \cdot \binom{7}{3}$.

113. $3 \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{60}{20}$.

114. $\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \binom{15}{3} + \binom{15}{4} + \binom{15}{5}$.

115. а) Первую команду можно выбрать $\binom{10}{5}$ способами. Этот выбор полностью определяет вторую команду. Однако при таком подсчете каждая пара команд A и B учитывается дважды: один раз, когда в качестве первой команды выбирается команда A, и второй, — когда в качестве первой команды выбирается команда B. Таким образом, ответ: $\binom{10}{5}/2$.

б) $\frac{15!}{5!5!5!3!}$; **в**) $\frac{15!}{5!5!5!2!}$.

116. Нужно указать 8 мест из 30, в которых будут произведены разрезы. Ответ: $\binom{30}{8}$.

117. Обозначим каждый ход ладьи вверх буквой С (Север), а каждый ход вправо - буквой В (Восток). Каждому перемещению ладьи из левого нижнего угла в правый верхний угол однозначно соответствует слово длины 14, состоящее из 7 букв С и 7 букв В. Количество различных путей равно $\binom{14}{7}$.

118. а) Обозначим участников номерами $1, 2, \ldots, 2n$. Каждая перестановка $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\}$ номеров участников дает разбиение на пары $\{a_1, a_2\}$, $\{a_2, a_3\}, \ldots$, $\{a_{2n-1}, a_{2n}\}$. Имеется $(2n)!$ таких перестановок. Но многие из них дают одно и то же разбиение на пары: можно произвольно выбрать последовательность пар ($n!$ возможностей), можно произвольно выбрать порядок людей в парах (2^n возможностей). Итак, каждое разбиение на пары повторяется ровно $n! \cdot 2^n$ раз. Поэтому существует $\frac{(2n)!}{n!2^n}$ различных разбиений на пары.

б) $\frac{(2n)!}{n!2^n} = \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots \cdot 2n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ — нечетное число.

119. а) Разберите случаи в соответствии с тем, цифра какой четности стоит на первом месте. Затем в каждом случае выберите места для нечетных цифр. Ответ: $\binom{5}{2} \cdot 5^6 + \binom{5}{3} \cdot 4 \cdot 5^5$.

б) Каждому такому числу однозначно соответствует выбор 6-ти цифр из набора $9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$. Ответ: $\binom{10}{6}$.

Разберите все возможные представления чисел 2, 3, 4 в виде суммы нескольких натуральных слагаемых. Не забывайте, что первая цифра — не ноль. Ответ: **в**) 6; **г**) $1 + 5 + 5 + \binom{5}{2} = 21$; **д**) $1 + 10 + 5 + \binom{5}{2} + 5 \cdot 4 + \binom{5}{3} = 56$.

120. а) $\binom{45}{6}$;

б) $\binom{39}{3} \cdot \binom{6}{3} = 182780$. Подходят карточки, в которых зачеркнуто 3 номера из правильных 6 и 3 из оставшихся 39 неправильных.

121. Пусть имеется некоторая компания из k юношей и k девушек. Поставим в соответствие этой компании множество из 10 человек, в которое включим k девушек, вошедших в компанию, и $10 - k$ юношей, не вошедших в компанию. Установленное соответствие является взаимно-однозначным. В самом деле, по любому множеству из 10 людей однозначно восстанавливается компания — в компанию входят все девушки, которые входят в множество, и все юноши, которые не входят в множество. Таким образом, искомое число равно числу способов выбрать 10 человек из 20 человек, то есть $\binom{20}{10} = 19 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 4$.

122. $\binom{6}{3}(\binom{6}{3} - 1)(\binom{6}{3} - 2)(\binom{6}{3} - 3)(\binom{6}{3} - 4)$.

123. Квадраты, окрашенные в белый цвет, можно выбрать $\binom{n}{4}$ различными способами.

Квадраты, окрашенные в черный цвет, можно после этого выбрать $\binom{n-4}{6}$ различными способами.

Оставшиеся $n-10$ квадратов можно окрасить произвольно любым из двух цветов (красный, желтый) 2^{n-10} различными способами.

Общее количество различных раскрасок равно $\binom{n}{4} \cdot \binom{n-4}{6} \cdot 2^{n-10}$.

125. На первом месте может стоять любая из 9 цифр (кроме 0), на втором, третьем,..., $n-1$-м — любая цифра (из 10), на последнем — одна из 5: если среди предыдущих цифр встретилось четное число нечетных, то любая четная цифра, если нет, то любая нечетная. По правилу произведения, ответ: $9 \cdot 10^{n-2} \cdot 5$.

126. Указание: $0+1+2+\ldots+9>40$.

128. а) $\binom{9}{3,3,3}$;

б) Условию задачи удовлетовроряют 4 варианта — все несут по 3 предмета, первый — 3, второй — 2 и третий — 4, и первый — 2, второй — 3 и третий — 4.

Ответ: $\binom{9}{3,3,3} + 2\binom{9}{4,3,2}$.

130. а) Положение каждой шашки на доске задается парой чисел (i,j), $1 \leq i,j \leq 8$. Выберем произвольное 6-подмножество первых координат из 8-множества: $i_1 < i_2 < \ldots < i_6$. Такой выбор можно осуществить $\binom{8}{6}$ способами. Выберем теперь слово $j_1 j_2 \ldots j_6$, в котором все символы различны. Это можно сделать $[8]_6 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 3$ способами. Шашки могут быть размещены в клетках (i_1,j_1), (i_2,j_2),..., (i_6,j_6). По правилу произведения общее число размещений 6 шашек на шахматной доске 8×8 так, что никакие две шашки не стоят в одном ряду по горизонтали и вертикали есть $\binom{8}{6} \cdot [8]_6 = 564480$.

б) В дополнение к а) имеются различные шашки: черные и белые. Существует $\binom{6}{2}$ способов выбрать из 6 возможных мест 2 места для белых шашек и на остальных 4 местах разместить черные шашки. По правилу произведения общее число возможных размещений есть $\binom{6}{2} \cdot \binom{8}{6} \cdot [8]_6 = 8467200$.

131. $m=3$, $n=2$.

132. Общее число способов выбрать подкомиссию из 3 человек равно $\binom{10}{3} = 120$. Каждая ссора разрушает не более 8 таких подкомиссий, поэтому число разрушенных подкомиссий не больше $8 \cdot 14 = 112$. Значит, не разрушено по крайней мере 8.

133. Обозначим депутатов точками (на плоскости или в пространстве). Соединим точки красным отрезком, если соответствующие депутаты лояльны друг к другу, и синим — если враждуют. В такой интерпретации нам нужно посчитать число одноцветных треугольников с вершинами в данных точках. Число всех треугольников равно $30 \cdot 29 \cdot 28/6 = 4060$ (поскольку первую вершину можно выбрать 30 способами, вторую — 29, третью — 28, при этом каждый треугольник учитывался 6 раз с различным порядком выбора вершин). Посчитаем теперь число неодноцветных треугольников. В каждом таком треугольнике ровно 2 угла, в которых сходятся красный и синий отрезки (назовем такие углы разноцветными). В одноцветных треугольниках, очевидно, разноцветных углов нет. Поэтому достаточно найти число разноцветных углов и поделить это число пополам. В каждой вершине по условию сходится 6 красных и 23 синих отрезков, т.е. имеется $6 \cdot 23 = 138$ разноцветных углов с фиксированной вершиной. Общее количество неодноцветных тругольников, таким образом, равно $138 \cdot 30/2 = 2070$. Число одноцветных треугольников равно $4060 - 2070 = 1990$.

134. Рассмотрите 7 оставшихся на полке книг. Между каждыми двумя соседними (и справа и слева от крайних) либо есть пустое место (от одной вынутой книги) либо нет. Набор пустых мест однозначно определяет комплект вынутых книг. Ответ: $\binom{8}{5}$.

135. Первую точку можно выбрать десятью способами. Каждую из следующих восьми точек можно выбрать двумя способами, так как она должна быть соседней с одной из ранее выбранных точек (иначе получится самопересекающаяся ломаная). Поскольку начало и конец при таком подсчете не различаются, результат нужно разделить на 2. Следовательно, всего имеется $10 \cdot 2^8/2 = 1280$ ломаных.

136. Заметим, что для каждого вопроса количество людей, не ответивших на него, не больше четырех, иначе на какой-то вопрос не ответили некоторые пять человек, что противоречит условию. С другой стороны, для каждой четверки людей найдется вопрос, на который они не ответили (иначе они бы вместе ответили на все вопросы вопреки условию); таким образом, на этот вопрос не ответили в точности эти четверо людей. Итак, каждой четверке людей можно поставить в соответствие вопрос, на который они (и только они) не ответили. Поэтому число вопросов не меньше числа четверок людей, которые можно выбрать из 10 человек (т.е. числа сочетаний из 10 по 4). Наоборот, если в тесте было вопросов столько, сколько имеется четверок людей, причем на каждый вопрос не ответило 4 человека и все эти четверки различны, то условие задачи выполняется. Число же способов выбрать 4 элемента из 10 равно $\binom{10}{4} = 210$.

137. По условию задачи, любые 5 человек сейф открыть не могут. Значит у них нет ключа от некоторого замка. При этом любой другой член комиссии должен этот ключ иметь. Поэтому нужно поставить $\binom{9}{5}$ замков. 4 ключа от каждого замка отдаются некоторой четверке членов комиссии, причем разные ключи раздаются разным четверкам. В общем случае понадобится $\binom{n}{m-1}$ замков и $n-m+1$ ключ к каждому из них.

138. Из условия задачи следует, что кузнечик должен совершить всего 27 прыжков — по 9 в каждом направлении. Обозначим направления буквами a, b и c. Каждый путь однозначно определяется последовательностью длины 27, в которой буквы a, b и c встречаются по 9 раз.

Ответ: $\frac{27!}{9!^3}$.

139. а) $\binom{n}{k}$; **б)** "Не менее k" означает 0 или 1 или 2 или… или k. Поэтому ответ: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k}$.

Подумайте, почему неверно следующее рассуждение: сначала выберем места, на которых стоят k единиц, это можно сделать $\binom{n}{k}$ способами. На остальных местах может стоять либо 0 либо 1, поэтому ответ: $\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$.

140. Для размещения 1 выберем среди n возможностей k позиций $\binom{n}{k}$ способами. Тогда для каждого размещения символов 1 существует 2^{n-k} способов поместить 0 или 2 в каждую из оставшихся $n-k$ позиций. Таким образом, количество тернарных последовательностей длины n, содержащих в точности k единиц, равно $\binom{n}{k}2^{n-k}$.

141. Пусть множители имеют вид $2^{a_1}5^{b_1}$, $2^{a_2}5^{b_2}$ и $2^{a_3}5^{b_3}$. Тогда $a_1 + a_2 + a_3 = 6$ и $b_1 + b_2 + b_3 = 6$. При этом числа a_i и b_i могут быть равны нулю. Если $a_1 = k$, то для разложения $a_2 + a_3 = 6 - k$ получаем $7 - k$ вариантов. Поэтому для разложения $a_1+a_2+a_3 = 6$. получаем $7+6+5+4+3+2+1 = 28$ вариантов. Всего получаем $(28)^2 = 784$ способа. Но пока что мы не учли тождественность разложений, отличающихся лишь порядком множителей. Есть ровно одно разложение, не зависящее от порядка множителей, в котором все множители равны 100. Те разложения, в которых есть два равных множителя, мы посчитали трижды. В каждый из равных множителей 2 может входить в степени 0, 1, 2 или 3, т.е. всего четырьмя различными способами; столькими же способами может входить 5. Всего получаем 16 разложений такого вида, но одно из них — рассмотренное выше разложение с тремя равными множителями. Остается 15 разложений, каждое из которых мы посчитали трижды. Количество разложений с попарно различными множителями равно $784 - 1 - 45 = 738$. Каждое из них мы посчитали 6 раз, поэтому среди них будет $738/6 = 123$ различных разложения. Всего получаем $1 + 15 + 123 = 139$ разложений.

142. 36 шаров.

143. Выберем сначала четырех юношей ($\binom{12}{4}$ способами), затем четырех девушек ($\binom{12}{4}$ способами), и образуем из них 4 пары ($4!$ способами). Ответ: $\binom{12}{4}\binom{15}{4} \cdot 4!$.

144. $\binom{12}{5,5,2}$.

145. $\binom{7}{5} \cdot \binom{9}{5}$.

146. **а**) $\binom{25}{2}$; **б**) $\binom{25}{3}$; **в**) $\binom{23}{4} + \binom{24}{3} + \binom{24}{3}$.

Глава 3

152. $x = 2$, $y = 3$, $n = 5$.

153. При $n = 2^k - 1$.

154. Найдем отношение соседних биноминальных коэффициентов

$$\binom{n}{k} : \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} : \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{k+1}{n-k}.$$

Это число больше единицы, если $k + 1 > n - k$, т.е. $2k > n - 1$ и меньше единицы в противном случае.

155. Найдем отношение соседних коэффициентов последовательности $a_k = k\binom{n}{k}$.

$$k\binom{n}{k} : (k+1)\binom{n}{k+1} = \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)!} : \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{k}{n-k}.$$

Следовательно, эта последовательность возрастает, если $k > n - k$ и убывает, если $k < n - k$. При $n = 40$ максимум достигается, если $k = 20$ и 21.

156. $\binom{100}{64}2^{64}$.

157. $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!}(p-k)!$. Если $0 < k < p$, то $k!(p-k)!$ и p взаимно просты, поэтому число p в числителе сократиться не может.

158. Число 18 нельзя представить в виде суммы чисел 5 и 7, поэтому коэффициент при x^{18} будет равен нулю. Число 17 представляется в виде суммы чисел 5 и 7 следующим образом: $17 = 7 + 5 + 5$; с точностью до перестановки слагаемых это представление единственно. В одном из 20 выражений $1 + x^5 + x^7$ мы должны выбрать x^7, а в двух из 19 оставшихся таких выражений мы должны выбрать x^5. Поэтому коэффициент при x^{17} равен $20 \cdot \binom{19}{2} = 3420$.

159. Константа — это коэффициент при $(x^3)^4 \cdot (1/x^2)^6$, т.е. $\binom{10}{4} = 210$.

160. а) 3, 1; **б**) $2^3 \cdot (-1)^7 \cdot \binom{10}{3} = -960$; **в**) $\binom{10}{3,1,0,5,1} = \frac{10!}{3!\cdot 5!} = 5040$ (по теореме о полиномиальных коэффициентах).

161. Подставим в полиномиальную теорему $n = p$, $m = a$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 1$. Получим

$$(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{a \text{ раз}})^p = \sum_{k_1+k_2\ldots+k_a=p} 1^{k_1}\ldots 1^{k_a}\binom{p}{k_1,\ldots k_a} = \sum_{k_1+k_2\ldots+k_a=p} \frac{p!}{k_1!\ldots k_a!}.$$

Числители всех дробей делятся на p. Знаменатели делятся на p только, если одно из k_i равно p, остальные k_j — 0. Поэтому ровно a слагаемых равны единице $(p!/p!)$, остальные делятся на p. Значит, a дает при делении на p тот же остаток, что и a^p. Теорема доказана.

162. а) 2^n; **б**) $(a+1)^n$; **в**) 0;

г) $2^{n-1} - \binom{n}{(n+1)/2}/2$ для нечетных n; 2^{n-1} для четных n.

д) 0, если $n \equiv 2, 5 \mod 6$; 1, если $n \equiv 0, 1 \mod 6$; -1, если $n \equiv 3, 4 \mod 6$.

163. а) Левая часть: число способов выбрать m элементов из r, а потом из выбранных m выбрать еще k. Правая часть: сразу выбираем k элементов из r, а из оставшихся выбираем еще $m-k$.

164.

$$\binom{n-1}{k-1}\cdot\binom{n}{k+1}\cdot\binom{n+1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\cdot\frac{(}{(k+}$$

166. а) Левая часть равенства перечисляет все слова длины $m_1 + m_2$ в алфавите $\{0, 1\}$, содержащие в точности n символов 1. Разобьем каждое такое слово на две части длины m_1 и m_2 соответственно. Первая часть содержит k единиц, вторая — $n-k$ единиц. Для каждого k количество таких слов с k единицами в первой части и $n-k$ единицами во второй равно k-му члену правой части. Поэтому правая часть перечисляет то же множество слов в соответствии с количеством единиц в первой части слова.

б) Левая часть есть число способов размещения k одинаковых объектов по $n+2$ различным ящикам. Правая часть подсчитывает количество таких же размещений разбиением множества размещений согласно количеству объектов в первом ящике.

в) Пусть множество S состоит из различных шаров (например, занумерованных), среди которых m_1 красных шаров и m_2 синих. Подсчитаем количество способов выбрать n элементов множества S. С одной стороны, можно выбрать k красных элементов $\binom{m_1}{k}$ способами и $n-k$ голубых элементов $\binom{m_2}{n-k}$ способами, где k принимает все допустимые возможности в диапазоне от 0 до n. С другой стороны n элементов из $m_1 + m_2$ элементов можно выбрать $\binom{m_1+m_2}{n}$ способами.

г) Повторить решение предыдущей задачи при $m_1 = m_2 = n$. Использовать равенство $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

167. Несколько раз используя основное рекуррентное соотношение для числа сочетаний $\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q} - \binom{p-1}{q-1}$, получим:

$$\binom{n+3}{k+3} = \binom{n+2}{k+3} + \binom{n+2}{k+2} = \binom{n+1}{k+3} + 2\binom{n+1}{k+2} + \binom{n+1}{k+1} =$$
$$\binom{n}{k+3} + 3\binom{n}{k+2} + 3\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k},$$

поэтому
$$\binom{n+3}{k+3} - \binom{n}{k} - \binom{n}{k+3} = 3\left(\binom{n}{k+2} + \binom{n}{k+1}\right),$$
то есть целое число, делящееся на 3.

169. а) n^3 есть число способов размещения трех различных объектов по n различным ящикам. Сумма $\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}$ подсчитывает то же количество размещений, классифицируя их по количеству занятых ящиков. Поэтому $p = 1$, $q = r = 6$.

б) Используем наряду с результатом пункта а) тождество $\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{j} = \binom{n}{j+1}$, где j — произвольное неотрицательное целое число. Имеем

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{k}{1} + 6\binom{k}{2} + 6\binom{k}{3}\right] =$$
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} + 6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2} + 6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{3} = \binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} + 6\binom{n}{4}.$$

170. $11^2 = (10+1)(10+1) = 10^2\binom{2}{0} + 10\binom{2}{1} + 10^0\binom{2}{2} = 100 + 20 + 1 = 121$. Похожа ситуация и с $11^4 = 10^4 + 10^3\binom{4}{1} + 10^2\binom{4}{2} + 10\binom{4}{3} + 1 = 10000 + 4000 + 600 + 40 + 1 = 14641$.

171. Индукция по предыдущей строчке.

172. Индукция по количеству чисел на диагонали.

173. Индукция по количеству чисел на диагонали.

174. Подсказка. Равенство можно доказать методом математической индукции.

Глава 4

178. Запишем уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$

Сделаем замену $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - 1$, $y_3 = x_3 - 2$. Тогда имеем: $y_1 + y_2 + y_3 = 7$, $y_1 \geq 1$, $y_2 \geq 1$, $y_3 \geq 1$.

Ответ: $\binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$.

179. Разложение есть сумма членов вида $x^i y^j z^k$, где $i + j + k = 10$. Поэтому количество слагаемых равно числу неотрицательных целых решений уравнения $i + j + k = 10$, которое равно $\binom{10+2}{2} = 66$.

180. Ответ: $\binom{12}{9}$.

181. Пусть $x_1, \ldots, x_7$ — количество монет, доставшихся нумизматам. Тогда число способов дележа равно числу решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots x_7 = 15$ в натуральных числах. Ответ: $\binom{14}{6}$.

182. Расположим карточки по неубыванию. Т.к карточек всего 11, а выбрать надо 8, найдем число решений уравнения, отвечающего за количество исключенных карточек:

$x_3+x_4+x_5=3$, где x_3 — число исключенных карточек с цифрой "3", x_4 — с цифрой "4", x_5 — с цифрой "5". Ответ: $\binom{3+3-1}{3}=\binom{5}{3}=10$.

183. а) $\binom{13}{3}$; **б**) $\binom{9}{3}\cdot 4^3$; **в**) $\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{3}\cdot 4$. **г**) $\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{3}$.

184. Из $m+1$-ой позиции ($m-1$ место между белыми шарами и два места по краям) нужно выбрать n позиций, в которые будут положены черные шары. Ответ: $\binom{m+1}{n}$.

185. Ответ: $\binom{14}{3}$.

186. $\binom{25}{5}$.

187. $\binom{100-1}{5-1}=\binom{99}{4}$.

188. Пусть $x_1,\ldots,x_{10}$ — искомые числа, упорядоченные по возрастанию. Обозначим $y_1=x_1, y_2=x_2-x_1,\ldots,y_{10}=x_{10}-x_9, y_{11}=36-x_{10}$. Тогда все y_i положительны и их сумма равна 36, т.е. задача свелась к классической задаче Муавра.

Ответ: $\binom{36-1}{11-1}=\binom{25}{10}$.

189. Составим сначала расписание — сколько человек в какой день готов принять доктор. Пусть $x_1,\ldots,x_5$ — число пациентов, принятых в понедельник, ..., пятницу. Тогда расписаний будет столько же, сколько решений уравнения $x_1+\ldots+x_5=6$ в неотрицательных числах, т.е $\binom{10}{4}$. Чтобы сформировать распиание приема, надо упорядочить пациентов и вписать их в расписание по датам. Поэтому ответ: $\binom{10}{4}\cdot 6!$.

190. $\binom{10}{0}\binom{9}{4}\binom{17}{4}+\binom{10}{1}\binom{9}{3}\binom{18}{4}+\binom{10}{2}\binom{9}{2}\binom{19}{4}+\binom{10}{3}\binom{9}{1}\binom{20}{4}+\binom{10}{4}\binom{9}{0}\binom{21}{4}=15638850$.

191. $\binom{11}{5}\cdot\binom{10}{5}$.

192. $1000000=2^6\cdot 5^6$. Каждый множитель однозначно определяется количеством двоек и пятерок, входящих в его разложение. Суммарное количество в трех множителях как двоек, так и пятерок, равно 6. Ответ: $\binom{8}{2}^2=784$.

193. Выложим шары в ряд. Для определения расклада наших шаров по шести ящикам разделим ряд пятью перегородками на шесть групп: первая группа для первого ящика, вторая — для второго и так далее. Таким образом, число вариантов раскладки шаров по ящикам равно числу способов расположения пяти перегородок. Перегородки могут стоять на любом из 19 мест (между 20 шарами — 19 промежутков). Поэтому число их возможных расположений равно $\binom{19}{5}$.

Рассмотрим ряд из 25 предметов: 20 одинаковых шаров и 5 одинаковых перегородок, расположенных в произвольном порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует некоторому способу раскладки шаров по ящикам: в первый ящик попадают шары, расположенные левее первой перегородки, во второй — расположенные между первой и второй перегородками и т.д. (между какими-то перегородками шаров может и не быть). Поэтому число способов раскладки шаров по ящикам равно числу различных рядов из 20 шаров и 5 перегородок, т.е. равно $\binom{25}{5}$ (ряд определяется теми пятью местами из 25, на которых стоят перегородки).

194. а) n^m; **б**) $\binom{m+n-1}{m}$.

195. $\binom{15}{7}\cdot\binom{10}{2}$.

196. а) n^n; **б**) $\binom{2n-1}{n}$.

197. $\binom{34}{4}=46376$.

198. а) $\binom{17}{8}$; **б**) $\binom{10}{8}=45$.

199. а) Она может побывать или не побывать на каждом из 28 некрайних полей.

Ответ: 2^{28}.

б) Надо представить число 29 в виде суммы 7 натуральных слагаемых (порядок важен!). Ответ: $\binom{28}{5}$.

200. $\binom{6+4-1}{6-1}^3 = \binom{9}{5}^3$.

201. $\binom{11}{4} = 330$.

202. $\binom{22}{2} = 231$.

203. $\binom{6}{3} \cdot \binom{13}{3} = 5720$.

204. $\binom{14}{2} = 91$.

205.Первая операция взять n шариков из коробки — это можно сделать $\binom{n+k-1}{k-1}$. Вторая операция положить n шаров в m коробок — это можно сделать $\binom{n+m-1}{m-1}$. В силу независимости операция выполнить обе операции можно $\binom{n+k-1}{k-1}\binom{n+m-1}{m-1}$.

206. 1 решение. Каждому выбору 3-подмножеству $\{i, j, k\}$ множества $\{1, 2, \ldots, 20\}$ взаимно однозначно соответствует последовательность $\{a_1, a_2, \ldots, a_{20}\}$ из 0 и 1 длины 20, в которой символ 1 стоит на местах выбранных элементов ($a_i = a_j = a_k = 1$), а остальные символы равны 0. Количество различных 3-подмножеств, которые не содержат соседних элементов 20-множества, равно количеству последовательнстей из трех символов 1 и $20 - 3 = 17$ символов 0, в которых никакие две единицы не стоят рядом. Количество таких последовательностей равно $\binom{17+1}{3} = \binom{18}{3} = 816$.

2 решение. Для каждого возможного подмножества $\{i, j, k\}$, $i < j < k$, не содержащего двух последовательных чисел, определим $x_1 = i - 1$, $x_2 = j - i - 2$, $x_3 = k - j - 2$, $x_4 = 20 - k$. По условию задачи числа x_i - неотрицательные целые числа, удовлетворяющие уравнению $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$. Каждому подмножеству $\{i, j, k\}$ соответствует единственное неотрицательное решение уравнения. Наоборот, каждому неотрицательному решению уравнения соответствует единственное подмножество $\{i, j, k\}$. Таким образом, наша задача эквивалентна нахождению числа неотрицательных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$. Количество таких решений дается формулой $\frac{[16]^3}{3!} = 816$.

207. Сначала выстроим все книги в ряд, это можно сделать 20! способами, а потом, не меняя порядка, будем расставлять их по полкам, сначала на первую, потом на вторую,... Число способов выполнить последнюю операцию равно $\binom{24}{4}$. Ответ: $20! \cdot \binom{24}{4}$.

211. $80\% + 60\% - 100\% = 40\%$.

212. Хотя бы в каком-то кружке занимаются $35 - 10 = 25$ учеников. Далее, $20 + 11 - 25 = 6$.

213. Перейдем к дополнительным событиям: свет был включен 20% времени, музыка молчала 10%, а дождь не шел 50% времени, так что дополнительные события не могли занять более $20 + 10 + 50 = 80\%$ времени. Следовательно, музыка под дождем в темноте звучала не меньше $100 - 80 = 20\%$ времени.

214. Наводящий вопрос. Сколько человек не знают английский язык? испанский? немецкий?

215. По формуле включений-исключений: $15 \cdot 4 - 6 \cdot 6 + 2 \cdot 4 - 1 = 31$.

216. Квадратами среди указанных чисел являются 1^2, $2^2, \ldots, 1000^2$, кубами — 1^3, $2^3, \ldots, 100^3$. Числа, которые являются и квадратами, и кубами есть шестые степени: $1^6, 2^6, \ldots, 10^6$. По принципу включений и исключений количество положительных целых чисел, не превышающих 1 000 000, которые являются либо квадратами, либо кубами целых положительных чисел, есть $1000 + 100 - 10 = 1090$.

217. 356.

218. Пусть A_1, A_2, A_3 — множества перестановок, удовлетворяющих трем перечисленным условиям соответственно. Количество перестановок n элементов, в которых зафиксировано положение $n-k$ из них есть $(n-k)!$. Поэтому $|A_1| = 7!$, $|A_2| = 8!$, $|A_3| = 7!$, $|A_1 \cap A_2| = 6!$, $|A_1 \cap A_3| = 4!$, $|A_2 \cap A_3| = 5!$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3!$.

По правилу включений и исключений получаем ответ: $7! + 8! + 7! - 6! - 4! - 5! + 3! = 49542$.

219. Пусть X множество очередей, в которых $АБВ$ стоят на первых местах, Y — в которых $БВГ$ стоят на $2-4$ местах и Z — в которых $ЕЖ$ на последних. Вариантов для ситуации $|X| = 4!$, $|Y| = 4!$ и $|Z| = 5!$. Пересечения: $|X \cap Y| = 3!$, $|X \cap Z| = 2!$, $|Y \cap Z| = 2!$, $|X \cap Y \cap Z| = 1$. Ответ: $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z| = 4! + 4! + 5! - 3! - 2! - 2! + 1 = 159$.

220. Всего выбрать 5 карточек можно $\binom{8}{5} = 56$ способами.

Если в наборе меньше двух согласных, то, поскольку всего гласных — 4, в таком наборе одна согласная и 4 гласных. Выбрать такие карточки можно 4 способами.

Если в наборе больше 2 гласных, то может быть 3 гласных и 2 согласных ($4 \cdot \binom{4}{2} = 24$ варианта) и 4 гласных и одна согласная, но такие наборы уже учтены. Поэтому ответ: $56 - 4 - 24 = 28$.

221. Пусть X — множество расрасок, при которых не закрашен верхний ряд, Y, — при которых не закрашен нижний ряд и Z, — при которых не закрашены две вертикальные полоски. Поскольку остальные клетки можно независимо или закрасить или нет, то $|X| = |Y| = 2^8$, $|Z| = 2^4$. Аналогично, что $|X \cap Y| = 2^4$, $|X \cap Z| = 2^4$, $|Y \cap Z| = 2^4$, $|X \cap Y \cap Z| = 2^2$.

Ответ: $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z| = 2^8 + 2^8 + 2^6 - 2^4 - 2^4 - 2^4 + 2^2 = 532$.

222. 20 кубиков не имеют красной грани, 15 — синей, 25 — зеленой. Поэтому $100 - 20 - 15 - 25 = 40$ кубиков точно имеют грани всех трех цветов. Легко построить пример, когда эта оценка достигается — пусть 20 кубиков имеют только синие и зеленые грани, 15 — только красные и зеленые, 25 — только красные и синие грани, а оставшиеся 40 кубиков — грани всех трех цветов.

223. A_1 студентов имеют не менее одной двойки, A_2 — не менее двух двоек, следовательно $A_1 - A_2$ студентов имеют ровно одну двойку. Аналогично, $A_2 - A_3$ студентов имеют ровно две двойки,..., $A_k - A_{k+1}$ студентов имеют ровно k двоек. Поэтому общее число двоек равно $(A_1 - A_2) + 2(A_2 - A_3) + 3(A_3 - A_4) + \ldots = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$. Подразумевается, что число студентов в группе конечно, поэтому все A_k, начиная с некоторого, равны 0.

224. а) $4 \cdot 13 - 6 \cdot 8 + 4 \cdot 5 - 3 = 21$.

б) Мы хотим построить множества A_1, A_2, A_3, A_4. Возьмем 15 непересекающихся множеств P_X, индексами X которых являются непустые подмножества множества $\{1, 2, 3, 4\}$ ($X \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, $X \neq \varnothing$), следующих размеров:

$|P_{\{1234\}}| = 3$; $|P_X| = 2$ для трехэлементных подмножеств X; $|P_X| = 1$ для двухэлементных подмножеств X; $|P_X| = 1$ для одноэлементных подмножеств X. Наконец, A_i есть объединение тех множеств P_X, у которых X содержит i.

226. Пусть A_1, A_2, A_3 — множества подмножеств, не пересекающихся с тремя заданными подмножествами, соответственно. Тогда $|A_1| = 2^8$ (все подмножества множества $\{5, 6, \ldots, 12\}$), аналогично $|A_2| = 2^6$, $|A_3| = 2^6$, $|A_1 \cap A_2| = 2^4$(все подмножества $\{6, 8, 10, 12\}$), $|A_1 \cap A_3| = 2^4$, $|A_2 \cap A_3| = 2^2$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2^0 = 1$ (единственное пустое множество). По формуле включений-исключений получаем ответ:

$$2^8 + 2^6 + 2^8 - 2^4 - 2^4 - 2^2 + 1 = 541.$$

227. Количество неотрицательных целых решений (без всяких ограничений) равно $\binom{n+2}{2}$. Пусть A, B, C — множества решений со свойствами $x = y$, $x = z$, $y = z$, соответственно. Тогда $|A| = |B| = |C|$ есть количество целых неотрицательных решений уравнения $2x + y = n$, которое равно $[n/2] + 1$ (x может принимать любое значение от 0 до $[n/2]$). Далее, множества $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$ пусты, если n не кратно 3, и содержат единственное решение (m, m, m), когда $n = 3m$. Тогда по формуле включений-исключений количество решений есть

$$\binom{n}{2} - 3([n/2] + 1) + 3 - 1 = \binom{n}{2} - 3[n/2] - 1$$

для n, кратных 3, или

$$\binom{n}{2} - 3([n/2] + 1) = \binom{n}{2} - 3[n/2] - 3$$

для n, не кратных 3.

228. **а**) 20%; **б**) 60%; **в**) 70%.

229. Пусть W — множество чисел, кратных 2, X — кратных 3, Y — кратных 5, Z — кратных 7.

а) $210 - |X| - |Y| - |Z| + |X \cap Z| + |X \cap Y| + |Y \cap Z| - |X \cap Z \cap Y| = 210 - \frac{1}{3}210 - \frac{1}{5}210 - \frac{1}{7}210 + \frac{1}{15}210 + \frac{1}{21}210 + \frac{1}{35}210 - \frac{1}{105}210 = 210 - 70 - 42 - 30 + 14 + 10 + 6 - 2 = 96.$

б) $210 - |W| - |X| - |Y| - |Z| + |W \cap X| + |W \cap Y| + |W \cap Z| + |X \cap Z| + |X \cap Y| + |Y \cap Z| - |X \cap Y \cap Z| - |W \cap Y \cap Z| - |W \cap X \cap Z| - |W \cap X \cap Y| + -|W \cap X \cap Z \cap Y| = 210 - 105 - 70 - 42 - 30 + 35 + 21 + 15 + 14 + 10 + 6 - 2 - 3 - 5 - 7 + 1 = 48.$

Попробуйте придумать, как решить эту задачу, не используя формулу включений-исключений. Подсказка: $48 = 210 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7}$.

в) Пусть A — множество чисел, кратных 6, B — кратных 10, C — кратных 15, тогда $A \cap B = B \cap C = A \cap C = A \cap B \cap C$ — множество чисел, кратных 30.

Ответ: $210 - (35 + 21 + 14) + (7 + 7 + 7) - 7 = 154$.

230. **а**) Общее количество различных слов, полученных перестановкой букв aaabbbccc, равно $\binom{9}{3,3,3} = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = 1680$.

б) Пусть $N(a)$ — количество перестановок, в которых стоят два символа a подряд. Все такие перестановки можно получить перестановкой букв $Abbbccc$, где $A = aa$; количество таких перестановок $\binom{7}{1,3,3} = \frac{7!}{1! \cdot 3! \cdot 3!} = 140$. В каждое полученное слово третья буква a может быть добавлена 7 различными способами. Поэтому $N(a) = N(b) = N(c) = 7 \cdot 140 = 980$.

Вычислим количество перестановок $N(a, b)$, в которых рядом стоят две буквы a и две буквы b.

Рассмотрим перестановки символов $ABccc$, где $A = aa$, $B = bb$, а затем поместим в них еще по одному символу a и b. Символ a можно поместить 5 различными способами, затем b можно добавить в полученную перестановку 6 различными способами. Кроме того, есть дополнительная возможность, что символ a помещается справа от aa, а затем b помещается между ними. Это есть перестановки символов $\{aaba, bb, c, c, c\}$. Поэтому

$$N(a,b) = \binom{5}{1,1,3} \cdot 5 \cdot 6 + \binom{5}{1,3,3} = 620.$$

Наконец, нужно вычислить количество перестановок $N(a, b, c)$, в которых две буквы a стоят рядом, две буквы b стоят рядом, две буквы c стоят рядом, т.е. количество различных перестановок символов $AaBbCc$, но такие перестановки могут иметь неразличимые фрагменты: aA и Aa, Bb и bB, cC и Cc. Поэтому рассмотрим перестановки со свойствами: перестановка содержит Aa, перестановка содержит Bb, перестановка содержит Cc. Тогда по формуле включений-исключений $N(a, b, c) = 6!-3\cdot5!+3\cdot4!-3! = 426$.

Теперь окончательно по формуле включений-исключений количество различных перестановок букв $aaabbbccc$, в которых нет двух расположенных рядом одинаковых символов, есть $1680 - 3 \cdot 980 + 3 \cdot 620 - 426 = 174$.

231. Пусть A_1 — множество перестановок $\{АБВГД, Е, \ldots, Я\}$, A_2 — множество перестановок $\{А, Б, В, \ldots, Й, КЛМНО, П, \ldots, Я\}$, A_3 — множество перестановок $\{А, Б, В, \ldots, Ш, ЬЪЭЮЯ\}$. Нужно найти количество элементов в объединении множеств $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. По формуле включений-исключений имеем

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3 \cdot (28+1)! - 3 \cdot (23+2)! + (18+3)!$$

232. Распределение конфет и шоколадок — независимые события, поэтому рассмотрим их отдельно, а позже воспользуемся правилом произведения.

Количество способов распределения конфет есть $\binom{40-5\cdot5+5-1}{4} = \binom{19}{4} = 3876$.

Количество распределений шоколадок равно количеству различных размещений 10 различных объектов по 5 различным ящикам при условии, что каждый ящик не пуст. По формуле включений-исключений (свойство A_i — i-ый ящик пуст, $i = 1, 2, \ldots, 5$) имеем

$$N_0 = N(\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_5}) = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} (5-k)^{10} = 5103000.$$

Общее количество распределений конфет и шоколадок есть $\binom{19}{4} N_0 = 19\,779\,228\,000$.

233. Перенумеруем людей цифрами от 1 до 8, супружеские пары будут иметь номера 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8. Общее число размещений без ограничений есть $8!/8 = 7! = 5040$. Пусть свойством A_1 обладают те размещения, при которых супруги из первой пары с номерами 1 и 5 сидят на диаметрально противоположных местах; аналогичный (для пар $(2,6)$, $(3,7)$ и $(4,8)$) смысл имеют свойства A_2, A_3 и A_4. Нужно вычислить $N(\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_4})$ — количество размещений, не обладающих ни одним из перечисленных свойств, для чего используем формулу включений-исключений.

Если 1 и 5 сидят напротив, то остальных людей можно разместить на оставшихся местах $6! = 720$ способами. Аналогично $A_2 = A_3 = A_4 = 720$.

Теперь нужно вычислить $N(A_1, A_2)$. Поместим 1 и 5 на диаметрально противоположные места. Тогда для 2 и 4 останется шесть способов размещения напротив друг друга. Остальные люди разместятся на оставшихся 4 местах 4! способами. Поэтому $N(A_i, A_j) = 6 \cdot 4! = 144$ для всех $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Далее заметим, что если 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7 сидят напротив друг друга, то 4 и 8 тоже сидят напротив друг друга. Разместить первую пару 1 и 5 напротив друг друга можно 8 способами, затем остается 6 способов разместить вторую пару 2 и 6 напротив друг друга, 4 способа размещения напротив третьей пары, наконец, два способа размещения напротив четвертой пары. Полученное произведение нужно разделить на 8 — количество поворотов стола, приводящее к одинаковым размещениям. Итак, мы имеем:

$$N(A_i, A_j, A_k) = N(A_1, A_2, A_3, A_4) = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2/8 = 48$$

для всех $i < j < k$ в диапазоне от 1 до 4.

Теперь по формуле включений-исключений имеем $N(\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_4}) = 5040 - 4 \cdot 720 + 6 \cdot 144 - 4 \cdot 48 + 48 = 2880$.

234. а) Пусть в коробке x_1 шоколадных колечек, x_2 колечек с орехами и x_3 с корицей. Нам нужно найти количество различных целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = 18$; $x_1, x_2, x_3, \geq 0$. Это количество дается формулой $\binom{18+3-1}{3-1} = \binom{20}{2} = 190$.

б) Для решения задачи при наличии ограничений сверху на количество колечек каждого сорта воспользуемся формулой включений-исключений.

Окончательно имеем: $190 - 45 - 45 - 120 + 15 + 15 = 10$.

в) Нахождение множества целочисленных решений $x_1 + x_2 + x_3 = 18$; $3 \leq x_1 \leq 9, 2 \leq x_2 \leq 4, 3 \leq x_3 \leq 9$ заменой переменных $y_1 = x_1 - 3$, $y_2 = x_2 - 2$, $y_3 = x_3 - 3$ сводится к нахождению целочисленных решений уравнения $y_1 + y_2 + y_3 = 10$; $0 \leq y_1 \leq 6, 0 \leq y_2 \leq 2, 0 \leq y_3 \leq 6$.

Ответ: $\binom{12}{2} - 2\binom{5}{2} - \binom{9}{2} + 2 = 12$.

235. Всего цветов 12, поэтому букетов из 12 цветов столько же, сколько и букетов из 3 цветов. Для 3 цветов ограничений по числу цветов одного вида в букете нет. Значит, по задаче Муавра ответ $\binom{12+3-1}{3-1} = \binom{14}{2} = 91$.

Глава 5

238. Любому подмножеству X, не пересекающемуся с $\{1, 3, 5\}$, можно сопоставить подмножество $X \cup \{1, 3, 5\}$, содержащее $\{1, 3, 5\}$. Поэтому тех и других подмножеств одинаково.

239. 2^n; $2^n - 2^{[(n+1)/2]}$.

240. Подмножеств одинаково. Выберем произвольный элемент x и каждому подмножеству A сопоставим подмножество $f(A) = A\Delta\{x\}$. В $f(A)$ либо на один элемент больше, чем в A, либо на один элемент меньше. В любом случае четность меняется. Поэтому f устанавливает взаимно-однозначное соответсвие между "четными" и "нечетными" подмножествами.

241. 2^9.

242. а) 2^n; **б**) 2^{mn}; **в**) $\binom{n}{k}^m$. **г**) $(2^n-1)^m$; **д**) Так как все столбцы попарно различны, первый столбец можно выбрать 2^n способами, второй — 2^n-1,..., последний — 2^n-m+1. То есть, ответ: $2^n\cdot(2^n-1)\cdot\ldots\cdot(2^n-m+1)$.

243. Выбор множеств A и B равносилен приписыванию каждому элементу множества C одной из букв a, b или c. В обоих случаях ответ 3^n.

244. $(2^k-1)^n$.

245. Поскольку множества A_i строго вложены друг в друга, то число элементов в них должно быть попарно различно. Это возможно, только если $A_0=\varnothing$, A_1 состоит из одного элемента, A_2 — из двух, A_3 — из трех,..., A_n — из n. Поскольку множества содержатся друг в друге, то каждое следующее получается из предыдущего добавлением одного элемента. Поэтому, чтобы задать всю последовательность множеств, надо только определить, в каком порядке мы добавляем элементы множества $\{1,\ldots,n\}$. Число порядков равно числу перестановок, т.е. $n!$.

248. а) Так как каждому элементу из области определения можно сопоставить m значений, то всего существует m^n функций.

б)

в)

г) Биекции существуют, только если $n=m$, в этом случае биекцией будет любая сюриективная функция, поэтому их будет $[n]_n=n!$.

250. а) По определению, бинарное отношение на множестве A — множество упорядоченных пар, т.е. подмножество декартова произведения $A\times A$. Поэтому число отношений равно числу подмножеств $A\times A$, т.е. $2^{|A\times A|}=2^{n\cdot n}=2^{n^2}$.

б) Рефлексивные отношения всегда обязательно содержат пары вида (x,x) (n штук, а каждая из остальных n^2-n пар может либо входить в отношение, либо не входить. Поэтому ответ: 2^{n^2-n}.

в) Антирефлексивных отношений столько же, сколько и рефлексивных.

255. Всего вариантов вытащить 2 шара из урны $\binom{10}{2}=45$. Пусть подходящих вариантов x, тогда $x/45=2/15$, т.е. $x=6$. Теперь пусть y белых шаров, тогда $\binom{y}{2}=6$, т.е. $y=4$. Ответ: в урне 4 белых шара.

256. а) $1/10^3$; **б**) $1/10^2$.

257. $\binom{10}{4}/\binom{25}{4}=21/1265$.

261. а) Всего исходов 2^{100}. Чтобы получить устраивающие нас исходы, надо выбрать номера бросков, в которых выпадет орел, т.е. 50 номеров из 100, что можно сделать $\binom{100}{50}$ способами. Ответ: $\frac{\binom{100}{50}}{2^{100}}$.

б) Число устраивающих нас исходов — ровно половина тех исходов, которые не нас не устравивали в предыдущем пункте. Поэтому вероятность равна $\frac{(2^{100}-\binom{100}{50})/2}{2^{100}}=\frac{1}{2}-\frac{10050}{2^{101}}$.

262. а) $5=1+4=2+3=3+2=4+1$, $6=1+5=2+4=3+3=4+2=5+1$, значит, вероятность выпадения 6 очков $(5/36)$ больше, чем вероятность выпадения 5 — $(4/36)$.

б) $7=1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1$, значит, вероятность выпадения 7 — $\frac{6}{36}$, $8=2+6=3+5=4+4=5+3=6+2$, вероятность выпадения 8 — $\frac{5}{36}$, 9 — $\frac{4}{36}$, 10 — $\frac{3}{36}$, 11 — $\frac{2}{36}$, 12 — $\frac{1}{36}$, 4 — $\frac{3}{36}$, 3 — $\frac{2}{36}$, 2 — $\frac{1}{36}$. Значит, 7 имеет наибольшую вероятность выпадения.

263. а) $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$;

б) Посчитаем количество благоприятных исходов: для 1 кости 6 вариантов, для 2 — 5, и для 3 уже только 4 варианта. Значит вероятность $\frac{6\cdot5\cdot4}{6^3} = \frac{5}{9}$.

в) Исключим из всех исходов те, в которых выпадают разные числа (их $6\cdot5\cdot4$) и те, в которых выпадают одинаковые (6 шт.). Искомая вероятность равна

$$\frac{6^3-6-6\cdot5\cdot4}{6^3} = \frac{5}{12}.$$

264. Под условие подходит случай, когда сумма равна 6 или 7, значит вероятность $\frac{7}{6^6}$.

265. Поскольку не каждые 2 разбиения равновероятны, например, $5-5-1$ более вероятно, чем $4-4-4$.

266. Более вероятно событие а).

267. а) Существует единственный подходящий исход из 2^n возможных, поэтому вероятность равна $1/2^n$, что меньше $1/2$ уже при $n=2$.

б) Всего исходов при n бросках кости — 6^n. Шестерка не выпадает ни разу в 5^n из них, а значит, выпадает хотя бы раз в 6^n-5^n случаях. Вероятность равна $(6^n-5^n)/6^n = 1-(5/6)^n$. Она будет больше $1/2$, если $(5/6)^n < 1/2$, что верно при $n \geq 4$.

в) Всего $\binom{52}{n}$ способов вытянуть n карт. Из них $\binom{48}{n}$ способов выбрать n карт из всех, кроме тузов. Поэтому вероятность не вытянуть ни одного туза равна

$$\frac{\binom{48}{n}}{\binom{52}{n}} = \frac{48!}{n!(48-n)!} : \frac{52!}{n!(52-n)!} = \frac{(52-n)(51-n)(50-n)(49-n)}{52\cdot51\cdot50\cdot49}.$$

Вероятность вытянуть туза ольше половины, когда число выше меньше половины, что верно при $n \geq 8$.

268. Всего 28 костяшек, а дублей 7. Вариантов выбрать 7 доминошек, чтобы не было дублей — $\binom{21}{7}$, а выбрать просто 7 доминошек — $\binom{28}{7}$.

269. Всего выбрать 2 доминошки можно $\binom{28}{2} = 378$ способами. Посчитаем, какое количество доминошек можно присоединить друг к другу. Если первая кость — дубль, то к ней можно присоединить 6 других костей, если не дубль, то выбрать для нее кость не дубль можно 10 способами, причем надо учесть порядок этих костей. То есть, всего костей, которые стыкуются между собой $7\cdot6+\frac{21\cdot10}{2} = 147$. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{147}{378}$.

270. Если билетов n, то всего возможных исходов 2^n, а неблагоприятный только один. Вероятность этого исхода $(\frac{1}{2^n})$ должна быть меньше $0.05 = \frac{1}{20}$, что верно для всех n, начиная с 5 (т.к. $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$. Ответ: 5 билетов.

271. а) Вероятность совпадения 5 чисел равна $\frac{1}{\binom{36}{5}}$ (одна выигрышная комбинация), вероятность совпадения 4 чисел равна (выберем одно из 5 правильно отмеченных чисел и заменим на 32 оставшихся, значит всего $5\cdot32 = 160$ выигрышных комбинаций) $\frac{160}{\binom{36}{5}}$, вероятность совпадения 3 чисел равна $\frac{\binom{36}{2}}{\binom{36}{5}}$ (выберем два из 5 правильно отмеченных чисел и заменим на два любых числа, значит $\binom{5}{2} \cdot \binom{33}{2}$ выигрышных комбинаций).

б) Совпадение 6 чисел — $\frac{1}{\binom{45}{6}}$, 5 чисел — $\frac{40\cdot 6}{\binom{45}{6}}$, 4 чисел — $\frac{\binom{43}{2}}{\binom{6}{2}\cdot\binom{45}{6}}$.

в) Посчитаем выигрышные билеты. Пусть числа первого билета — множество A, а числа второго билета множество B. Если одно выигрышное число среди $A \cap B$, то всего должно быть 7 выигрышных чисел, что неверно. Если два выигрышных числа среди $A \cap B$, то выигрышных билетов $\binom{3}{2}^2 \cdot \binom{37}{2} \cdot \binom{35}{2}$. Если три выигрышных билета среди $A \cap B$, то выигрышных билетов $\binom{3}{1}^2 \cdot \binom{37}{2} \cdot \binom{35}{2}$.

Ответ: $\frac{18\cdot\binom{37}{2}\cdot\binom{35}{2}}{\binom{45}{6}}$.

272. Мы докажем, что вероятность того, что ни у каких двух учеников не совпадают дни рождения, составляет меньше 1/2. В году 365 дней, поэтому для каждого из учеников есть 365 возможных вариантов для дня рождения. (Здесь мы опускаем тонкости (которые, впрочем, не сильно влияют на ход рассуждений), связанные с тем, что днем рождения может быть 29 февраля; для большей точности нужно еще учесть, что 29 февраля бывает раз в 4 года и поэтому в 4 раза реже встречается в качестве дня рождения человека.) Поэтому всего имеется $n = 365^{30}$ вариантов распределения дней рождения для 30 учеников. Посчитаем количество p вариантов, при которых никакие два дня рождения не совпадают. Отношение p/n и будет искомой вероятностью. Занумеруем учеников. У первого день рождения может быть в любой из 365 дней, у второго — в любой из 364 дней (не совпадающих с днем рождения первого), у третьего — в любой из 363 дней (не совпадающих с днем рождения первого и второго), и т.д., у тридцатого — в любой из 336 дней. Всего получается $p = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 336$ вариантов. Получаем: $p/n = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 336/365^{30}$. Можно убедиться (непосредственным долгим подсчетом или вычислением на компьютере), что величина p/n гораздо меньше 1/2. Мы предложим достаточно грубую оценку величины p/n при помощи следующей выкладки. Достаточно показать, что

$$\begin{aligned} p/n &= (364/365) \cdot (363/365) \cdot (362/365) \cdot \ldots \cdot (336/365) = \\ &= (1 - 1/365) \cdot (1 - 2/365) \cdot (1 - 3/365) \cdot \ldots \cdot (1 - 29/365) < 1/2. \end{aligned}$$

Домножим обе части неравенства на $(1+1/365)\cdot(1+2/365)\cdot(1+3/365)\cdot\ldots\cdot(1+29/365)$, получим:

$$\begin{aligned} &(1 - (1/365)^2) \cdot (1 - (2/365)^2) \cdot \ldots \cdot (1 - (29/365)^2) < \\ &< \frac{1}{2} \cdot (1 + 1/365) \cdot (1 + 2/365) \cdot (1 + 3/365) \cdot \ldots \cdot (1 + 29/365). \end{aligned}$$

Левая часть меньше 1, поэтому достаточно убедиться, что

$$\frac{1}{2} \cdot (1 + 1/365) \cdot (1 + 2/365) \cdot (1 + 3/365) \cdot \ldots \cdot (1 + 29/365) > 1$$

При помощи раскрытия скобок получим оценку: $\frac{1}{2}\cdot(1+1/365)\cdot(1+2/365)\cdot(1+3/365)\cdot\ldots\cdot(1+29/365) > \frac{1}{2}\cdot(1+(1/365+2/365+\ldots+29/365)) = \frac{1}{2}\cdot(1+(1/365)(1+2+\ldots+29)) = \frac{1}{2}\cdot(1+(29\cdot 30)/(2\cdot 365)) = \frac{1}{2}\cdot(1+870/730) > 1$.

273. В году 12 месяцев, поэтому количество распределений дней рождения равняется 12^{12}. А количество распределений дней рождений без повторений равняется 12!. Искомая вероятность равна $\frac{12!}{12^{12}}$.

274.а) Всего вариантов рассадки детей за парты 20!, поскольку можно пронумеровать места и поочередно сажать туда детей. А количество рассадок мальчик—девочка $10!\cdot 10!\cdot 2^{10}$, поскольку можно пронумеровать парты и сажать туда сначала мальчиков, а потом девочек, значит вероятность составляет $\frac{10!^2\cdot 2^{10}}{20!}$.

б) Раздать случайным детям 10 билетов можно $\binom{20}{10}$ способами, а раздать билеты поровну мальчикам и девочкам можно $\binom{10}{5}^2$ способами. Вероятность составляет $\frac{\binom{10}{5}^2}{\binom{20}{10}}$.

275. а) Рассадить детей случайно можно $(2n)!$ способами. Если мы хотим, чтобы Петя и Маша сидели рядом, то представим, что они склеены, тогда детей можно рассадить $(2n-1)!\cdot 2$ способами. Значит вероятность составляет $\frac{(2n-1)!\cdot 2}{(2n!)} = 1/n$.

б) Склеим всех девочек, тогда надо рассадить группу девочек и всех мальчиков — это можно сделать $(n+1)!\cdot n!$ способами. Значит, вероятность равна $\frac{(n+1)!\cdot n!}{(2n)!}$

276.а) Рассадить детей случайно можно $\frac{(2n)!}{n}$ способами (здесь надо учитывать, что первое место неопределено в отличии от предыдущей задачи). Если мы хотим, чтобы Петя и Маша сидели рядом, то представим, что они склеены, тогда детей можно рассадить $\frac{(2n-1)!\cdot 2}{2n-1}$ способами. Значит вероятность составляет $\frac{(2(n-1))!\cdot 2\cdot(2n)}{(2n!)\cdot(2n-1)}$.

277. $\frac{1}{\binom{10}{3}}$

278. Мы сделаем 3600 различных попыток, а всего вариантов $\frac{10!}{5!}$, Значит, вероятность равна $\frac{3600\cdot 5!}{10!}$.

279. Выбрать 4 ботинка, чтобы среди них не было парных можно $\frac{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}{4!}$ способами, а просто выбрать 4 ботинка можно $\binom{10}{4}$ способами. Значит, вероятность равна $\frac{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 6!\cdot 4!}{4!10!}$

280.а) Выбрать случайно 5 конфет можно $\binom{10}{5}$ способами, а выбрать 5 конфет без сюрприза можно $\binom{8}{5}$ способами, Значит, вероятность равна $\frac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}}$.

б) Выбрать конфеты, чтобы среди них была с сюрпризом, можно $2\binom{8}{4}$ способами. Вероятность равна $\frac{2\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}}$.

в) Выбрать 2 конфеты с сюрпризом можно столькими же способами, что и не выбрать ни одной конфеты с сюрпризом, поэтому ответ тот же, что и в пункте а).

283. Всего выборок $\frac{n!}{(n-k)!}$, выборок, содержащих данный элемент — $\frac{(n-1)!}{(n-k+1)!}$.

284. Расставить книги можно 40! способами, но каждой правильной расстановке книг трехтомника соответствует 5 неправильных расстановок. Поэтому вероятность равна $\frac{1}{6}$.

285.а) Могли быть стерты любые 3 числа (1000 вариантов), из них подходят только $7\cdot 6\cdot 5$ из них. Вероятность — $\frac{210}{1000} = 0,21$.

б) $\frac{10}{10^3} = 0,01$.

в) Если первое из оставшихся мест уникально, то вариантов $10\cdot 9$, если 2 место уникально, то $10 \cdot 9$, 3 — $10 \cdot 9$. Вероятность — $\frac{10 \cdot 9 \cdot 3}{10^3}$.

286.а) Выбрать места для одинаковых цифр можно $\binom{4}{2}$ способами, выбрать три различные цифры можно $[10]_3$ способами, вероятность составляет $\frac{\binom{4}{2} \cdot [10]_3}{10^4}$.

б) Выбрать пару для одинаковых цифр можно $\binom{4}{2}$ способами, вторая пара определяется автоматически, выбрать две различные цифры можно $[10]_2$, способами, Значит, вероятность равна $\frac{[10]_2 \cdot 6}{10^4}$.

в) Выбрать тройку для одинаковых цифр можно 4 способами, выбрать две различные цифры можно $[10]_2$ способами, Значит, вероятность равна $\frac{[10]_2 \cdot 4}{10^4}$;

г) $[10]_4$;

д) 10;

е) $[9]_4$.

289. В слове 2 буквы "с", три буквы "т", две буквы "а", одна "к" и две "и". Поэтому вероятность встретить каждую их этих букв соответственно $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, а вероятность составления слова $\frac{24}{10^5}$.

293.* а**) Всего исходов = 36*35. Чтобы карты были одного цвета, мы можем произвольно взять первую карту, а вторую в зависимости от цвета первой, т. е. получаем всего удовлетворительных исходов = 36*8. Вероятность равна 8/35.

б) Всего исходов = 36*36. Аналогично рассуждая, получаем всего удовлетворительных исходов = 36*9. Вероятность равна 1/4.

295.*** Всего исходов = 36!. Тузы должны быть рядом, поэтому посчитаем их как одну карту (которая может выглядеть 4! различными способами), получаем всего удовлетворительных исходов = 4!*33!. Вероятность равна 4! / (34*35*36) = 1 / (17*35*3)

296. а) $4\binom{32}{5}$; **б**) $\binom{4}{2}\binom{32}{4}$; **в**) $\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{28}{3}$; **г**) $\binom{36}{6}-\binom{32}{6}$; **д**) $\binom{36}{6}-\binom{32}{6}$; **е**) $\binom{4}{1}(\binom{36-4}{5}-\binom{36-2\cdot4}{5})$.

297.* а**) Должна быть только одна дама(которую можно выбрать 4 способами), поэтому оставшиеся 3 карты мы выбираем из 48 карт. Получаем всего таких наборов = 4 * (число сочетаний из 48 по 3).

б) Аналогично получаем = 2 * (число сочетаний из 48 по 3).

298.* а**) В одной масти существует только 9 комбинаций выбрать пять последовательных карт (исключая случай, когда попадается туз, двойка и т.д.) Всего мастей 4, поэтому ответ = 32. Вероятность равна 36 / (число сочетаний из 52 по 5)

б) 4 одинаковые карты можно выбрать 13 способами, а последнюю карту 48 способами. Ответ = (13*48). Вероятность равна 13*48 / (число сочетаний из 52 по 5) = 1 / 4165.

в) Число способов выбрать пять карт из одной масти = число сочетаний из 13 по 5. Всего мастей 4, поэтому ответ = 4 * (число сочетаний из 13 по 5)

299. $\frac{32!}{10!^3 \cdot 2! \cdot 3!}$.

303. Белого короля можно поставить на любое из 64 полей. Однако количество полей, которые он при этом будет бить, зависит от его расположения. Поэтому разберем три случая:

— если белый король стоит в углу (углов всего 4), то он бьет 4 поля (включая то, на котором стоит) и остается 60 полей, на которые можно поставить черного короля;

— если белый король стоит на краю доски, но не в углу (таких полей 24), то он бьет 6 полей, и для черного короля остается 58 возможных полей;

— если же белый король стоит не на краю доски (таких полей 36), то он бьет 9 полей, и для черного короля остается 55 возможных полей. Таким образом, всего есть $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$ способов расстановки королей.

304. а) $64 \cdot 49/2 = 1568$; **б**) $(4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55)/2 = 1806$; **в**) $(28 \cdot 56 + 20 \cdot 54 + 12 \cdot 52 + 4 \cdot 50)/2 = 1736$; **г**) $(4 \cdot 61 + 8 \cdot 60 + 20 \cdot 59 + 16 \cdot 57 + 16 \cdot 55)/2 = 1848$; **д**) $(28 \cdot 42 + 20 \cdot 40 + 12 \cdot 38 + 4 \cdot 36)/2 = 1288$.

306. а) Белую ладью можно поставить на любую из 64 клеток. Независимо от своего расположения она бьет 15 полей (включая поле, на котором она стоит). Поэтому остается 49 полей, на которые можно поставить черную ладью. Таким образом, всего есть $64 \cdot 49 = 3136$ разных способов.

б) $\frac{64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9}{6!}$;

в) $\frac{64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9}{4! \cdot 2!}$;

г) Решим задачу в общем случае — сколькими способами можно расставить n не угрожающих друг другу ладей на доске $n \cdot n$?

Заметим, что при любом расположении более n ладей найдется хотя бы одна вертикаль и хотя бы одна горизонталь с двумя или более ладьями, т.е. n это наибольшее число мирных ладей на доске $n \cdot n$.

На первую вертикаль можно произвольно поставить одну из n ладей, затем на вторую вертикаль — одну из $n-1$ оставшихся ладей, причем горизонталь, занятая первой ладьей исключается (ладьи не должны угрожать друг другу), на третью вертикаль — одну из $n-2$ оставшихся. (горизонтали, занятые первыми двумя ладьями, исключаются) и т.д., вплоть до $n-1$-й вертикали, на которой для ладьи остается выбор из двух горизонталей, и последней, n-й вертикали, с единственным полем для ладьи. Комбинируя n различных расположений ладьи на первой вертикали с $n-1$ расположением на второй, $n-2$ — на третьей и т.д., получаем $n!$ различных расположений ладей. В частности, на обычной доске восемь ладей, не угрожающих друг другу, можно расположить $8! = 40320$ способами.

Если ладьи занумерованы числами от 1 до n, то существует уже $(n!)^2$ расположений ладей, не угрожающих друг другу. Это следует из того, что n подходящих полей можно выбрать $n!$ способами; столько же способов имеется для расположения на этих полях n занумерованных ладей.

307. Всякая расстановка, удовлетворяющая условиям задачи, определяется выбором n полей для всех n мирных ладей и затем указанием k полей из этих n, на которых будут расположены белые ладьи, остальные $n-k$ полей займут черные ладьи. Таким образом, искомое число расстановок равно $n! \cdot \binom{n}{k}$.

308. Общее количество способов поставить k ладей на доску: $\binom{64}{k}$. Чтобы ладьи не били друг друга нужно выбрать $\binom{8}{k}$ способами столбцы, в которых они будут стоять и A_8^k способами строки. Значит, искомая вероятность равна:

$$\frac{\binom{8}{k} \cdot A_8^k}{\binom{64}{k}}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $p < 1/2$ при $k \geq 4$ и $p < 1/100$ при $k \geq 6$.

309. Если n ладей охраняют доску, то либо на каждой вертикали, либо на каждой горизонтали стоит хотя бы одна из них (если существуют вертикаль и горизонталь, свободные от ладей, то поле, находящееся на их пересечении, не атаковано). Число расстановок ладей по одной на каждой вертикали равно n^n (первую ладью можно поставить на одно из n полей первой вертикали; вторую, независимо от первой, на одно из n полей второй вертикали и т.д.). Столько же имеется расстановок и по одной на каждой горизонтали. Однако при таком подсчете дважды учитываются расстановки, в которых на каждой вертикали и на каждой горизонтали стоит по одной ладье. Так как каждая из них характеризуется тем, что никакая пара ладей не угрожает друг другу, то решением задачи является число $2 \cdot n^n - n!$.

312. а) $8!/2!2!2! = 5040$; **б**) $((8 \cdot 4)/2) \cdot (6!/2!2!) = 2880$.

313. а) Пространства состояний табло и пульта — векторные пространства над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, откуда следует первое утверждение.

б) Соответствие (состояние пульта) $\mapsto$(состояние табло) есть линейный оператор, и ядро его имеет размерность 1. Ответ: 2^{m+n-1}.

314. Куб можно повернуть так, чтобы грань, окрашенная первым цветом, заняла заданное положение. Для окраски противоположной ей грани есть 5 различных вариантов; разные раскраски противоположной грани дают геометрически различные раскраски куба. Среди оставшихся четырех граней можно выбрать грань, окрашенную данным цветом и перевести ее в данное положение (не меняя при этом положение первых двух граней). Разные раскраски трех оставшихся граней дают геометрически различные раскраски куба. Одну из этих граней можно окрасить тремя способами, одну из оставшихся — двумя. Всего получаем $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ геометрически различных раскрасок.

Решим теперь задачу для 12-гранника (додекаэдра). Количество всех возможных раскрасок додекаэдра равно 12! Чтобы найти число геометрически различных раскрасок, нужно поделить 12! на число самосовмещений додекаэдра. Любую из 12 граней можно перевести в любую другую. Кроме того, есть 5 поворотов (включая тождественный), сохраняющих данную грань. Всего получается 60 самосовмещений. Поэтому количество геометрически различных раскрасок додекаэдра равно $12!/60 = 7983360$.

318. Рассмотрим некоторый способ рассадки членов жюри. Назовем члена жюри везучим, если он сидит на своем месте. Из условия следует, что в любой момент рассадки лишь одно место, предназначенное для кого-то из еще не подошедших членов жюри, могло быть занято. Если такое место существует, то оно занято последним вошедшим невезучим. Значит, все невезучие члены жюри подходили к столу в том порядке, в котором они должны сидеть за столом, и садились на место следующего (по часовой стрелке) невезучего. Поэтому способ рассадки однозначно задается способом разбиения жюри на везучих и невезучих. Николай Николаевич и его сосед слева в любом случае являются невезучими. Любой же состав, не содержащий этих двоих, может быть множеством везучих. Для того, чтобы он был реализован, нужно, чтобы вслед за Николаем Николаевичем вошли все, кого мы выбрали везучими (в любом порядке), а затем все остальные в порядке их рассадки за столом по часовой стрелке. Поэтому количество способов рассадки такое же, как количество способов выбрать множество везучих из 10 членов жюри. Каждого из них можно отнести к одной из двух категорий, поэтому искомое число равно $2^{10} = 1024$.

319. Любому многоугольнику, не содержащему точки A, можно поставить в соответствие многоугольник, содержащий точку A, добавив ее к его вершинам. А вот обратную операцию, т.е. отбрасывание вершины A, можно производить только для n-угольников с $n \geq 4$. Поэтому многоугольников, содержащих точку A, больше, чем многоугольников, не содержащих точки A, причем больше на число треугольников с вершиной A, т.е. на $(n-1)(n-2)/2$.

320. Пусть всего имеется N неравных треугольников с вершинами в вершинах правильного n-угольника, причем из них N_1 правильных, N_2 неправильных равнобедренных и N_3 разносторонних. Каждый правильный треугольник равен одному треугольнику с фиксированной вершиной A, неправильный равнобедренный — трем треугольникам с вершиной A, а разносторонний — шести. Так как всего имеется $(n-1)(n-2)/2$ треугольников с вершиной A, то $(n-1)(n-2)/2 = N_1 + 3N_2 + 6N_3$. Ясно, что число неравных правильных треугольников равно 0 или 1, а число неравных равнобедренных равно $(n-1)/2$ или $(n/2)-1$, т.е. $N_1 = 1-c$, $N_1 + N_2 = (n-2+d)/2$, где c и d равны 0 или 1. Поэтому $12N = 12(N_1 + N2 + N3) = 2(N_1 + 3N_2 + 6N_3) + 6(N_1 + N_2) + 4N_1 = (n-1)(n-2) + 3(n-2+d) + 4(1-c) = n^2 + 3d - 4c$. Так как $|3d-4c| < 6$, то N совпадает с ближайшим к $n^2/12$ целым числом.

321. Если никакие три точки не будут лежать на одной прямой, то каждые три точки будут образовывать треугольник, и всего треугольников будет $6 \cdot 5 \cdot 4/3 \cdot 2 \cdot 1 = 20$. Если "усадим" 3 точки на одну прямую, то на один треугольник станет меньше. Значит, нужно создать 3 тройки точек, лежащих на одной прямой.

322. 999.

324. Пусть имеется некоторое расположение томов на полке. Рассмотрим всевозможные пары томов (всего таких пар $30 \cdot 29/2 = 435$). Назовем беспорядком пару томов, в которой том с большим номером стоит левее тома с меньшим номером. В начальной ситуации беспорядков максимум 435 (в случае, когда тома идут в порядке, обратном правильному, каждая пара томов образует беспорядок). В конечной ситуации не должно быть ни одного беспорядка. Заметим, что за одну операцию число беспорядков меняется не более, чем на 1. В самом деле, только в паре переставляемых томов может появиться или исчезнуть один беспорядок. Следовательно, при начальном расположении, в котором тома идут в обратном порядке, потребуется сделать не менее 435 операций. Наоборот, покажем, что 435 операций всегда достаточно. Если в некотором расположении томов есть беспорядки, то найдется пара соседних томов, образующая беспорядок. Поменяв местами эту пару томов, мы уменьшаем число беспорядков на 1. Таким образом, каждой операцией мы можем уменьшать число беспорядков на 1 и не более, чем через 435 операций прийти к расположению, в котором нет беспорядков, т.е. к правильному порядку томов.

325. **а**) Самое короткое решение содержит $2^8 - 1$ перемещений; **б**) $3^8 - 1$; **в**) $2 \cdot 3^7 - 1$.

326. Обозначим за a_n число способов подняться на лестницу из n ступенек. Очевидно, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ (на лестницу из двух ступенек можно либо запрыгнуть одним прыжком через две ступеньки, либо двумя прыжками через одну ступеньку). Пусть Петя запрыгивает на лестницу из n ступенек, $n > 2$. Если первый прыжок Пети — на две ступеньки, то ему осталось запрыгнуть на $n-2$ ступеньки, следовательно, число способов закончить подъем по лестнице равно a_{n-2}. Если же первый прыжок Пети — на одну ступеньку, то ему осталось запрыгнуть на $n-1$ ступеньку, следовательно, число способов закончить подъем в этом случае равно a_{n-1}. Таким образом, мы получаем, что $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Это равенство позволяет, зная a1 и a2, вычислять последовательно все a_n. (При этом будут получаться известные числа Фибоначчи.) Последовательно находим: $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$.

327. Если A_k — число k-значных чисел с такими свойствами, то $A_k = A_{k-1} + A_{k-2}$ (все k-значные числа с таким свойством можно разбить на начинающиеся с двойки и начинающиеся с группы 12), $A_1 = 2$, $A_2 = 3$, $A_3 = 5$, $A_4 = 8$, $A_5 = 13$, $A_6 = 21$, $A_7 = 34$.

328. Сразу отметим, что число N возможных циклических порядков следования шпилей равно $7!/7 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Пусть пешеход в некоторый момент видит здания в каком-то циклическом порядке. Порядок следования шпилей не изменится, пока пешеход не пересечет прямую линию, проходящую через некоторые два шпиля. Проведем прямую через каждую пару шпилей (таких прямых всего $7 \cdot 6/2 = 21$). Эти прямые разобьют плоскость на несколько областей. Пока пешеход находится в одной области, он видит здания в одном и том же порядке. Теперь оценим число областей. Одна прямая разбивает плоскость на две области. Каждая следующая прямая (пусть ее номер — k) пересекается со всеми предыдущими и делится точками пересечения не более, чем на k частей. Следовательно, при проведении k-ой прямой добавляется не более k новых областей. Итак, количество областей, на которые плоскость делится 21 прямой, не превосходит $2 + (2 + 3 + ... + 21) = 232$. Имеем: $232 < 720$, поэтому не все порядки могут быть увидены пешеходом.

331. Сумму в k копеек можно разменять на 1- и 2-копеечные монеты $[k/2] + 1$ способами (способ определяется числом двухкопеечных монет). Ответ: $[20/2] + 1 + [15/2] + 1 + [10/2] + 1 + [5/2] + 1 + [0/2] + 1 = 29$.

333. Очевидно, что, так как у ученика 33 одноклассника, то учитель может такое делать не более 33 месяцев. Теперь давайте приведём пример. Пусть идёт i-й месяц. Тогда для каждого числа от 1 до 33, кроме одного, найдётся другое число, сумма которых будет давать остаток i по модулю 33. То число, для которого, другое число не найдётся, потому что его сумма с самим собой даёт остаток i. При чётных i это i/2, а при нечётных - (i+33)/2. Но тогда для него в соответствие можно поставить число 34. Тогда видно, что не было у учеников повторов среди соседей, потому что по номеру месяца можно определить соседа.

334. Сделаем биекцию между всеми цифрами в последовательности 1, 2, 3, :, 1000 и нулями в последовательности 1, 2, 3, :, 10000. Рассмотрим некое число x из первой последовательности и какую-то цифру этого числа d. Дописав в числе x после d цифру 0, мы получим другое число y, которое есть во второй последовательности. Давайте сопоставим цифре d именно этот 0 из y. Обратно, рассмотрим во второй последовательности число y, которое содержит в своей десятичной записи 0. Пусть d - это цифра, которая стоит в этом числе перед нулем (такая найдется, поскольку десятичная запись числа не может начинаться с нуля). Зачеркнем теперь в числе y цифру 0, получим некое число x, которое есть в первой последовательности. Сопоставим цифре 0 из y как раз эту цифру d из x. Можно заметить, что если какой-то цифре сопоставлен нуль, то этому нулю сопоставлена эта цифра.

Заметим, что сделанные нами соответствия:

не сопоставляют одной и той же цифре из первой последовательности разные нули из второй (каждой цифре сопоставлен 0 и причем только один)

не сопоставляют одному и тому же нулю из второй последовательности разные цифры из первой (каждому нулю сопоставлена цифра и притом только одна)

разным нулям из второй последовательности сопоставляют разные цифры из первой последовательности

разным цифрам из первой последовательности сопоставляет разные нули из второй последовательности

Значит приведенное нами соответствие - биекция, поэтому, действительно, количество всех цифр в первой последовательности равно количеству нулей во второй, что и требовалось доказать.

336. Указание. Доказательство можно провести по индукции.

337. Пусть всего учеников n. Воспользуемся формулой включения-исключения. Всего перестановок $n!$. Тех из них, которые оставляют на месте определенный элемент — $(n-1)!$. При этом имеется ровно $n = \binom{n}{1}$ способов выбрать этот элемент. Перестановок, оставляющих на месте два элемента ровно $(n-2)!$, способов выбрать эти два элемента: $\binom{n}{2}$. В общем случае перестановок, сохраняющих определенные k элементов — $(n-k)!$, а способов выбрать эти элементы — $\binom{n}{k}$.

В результате получаем

$$x_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!.$$

После упрощения

$$x_n = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

Заметим, что вероятность такой перестановки равна

$$\frac{x_n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \approx \frac{1}{e}.$$

338. Аналогично задаче 337 получаем

$$\frac{n!}{(n-m)!} - \binom{m}{1}\frac{(n-1)!}{(n-m)!} + \binom{m}{2}\frac{(n-2)!}{(n-m)!} - \ldots + (-1)^k \binom{m}{k}\frac{(n-k)!}{(n-m)!} + \ldots + (-1)^m \binom{m}{m}\frac{(n-m)!}{(n-m)!}$$

или, после упрощений,

$$\frac{m!}{(n-m)!} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{(n-k)!}{k!(m-k)!} \right).$$

Литература

[1] *Бунимович Е.А., Булычев В.А.* Вероятность и статистика. 5—9 кл. М.: Дрофа, 2002.

[2] *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

[3] *Виленкин Н.Я.* Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975.

[4] *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[5] *Кузнецов О.П.* Дискретная математика для инженера. СПб.: Лань, 2004.

[6] Сборник задач по математической логике и алгебре множеств. Издательство Саратовского университета, 1969.

[7] http://problems.ru