Занятие 10

Пусть даны функции g из A в B и f из B в C. Тогда положим

$$f \circ g = \{(a, c) \in A \times C \mid \text{существует } b \in B, \text{ т. ч. } (a, b) \in g \text{ и } (b, c) \in f\}.$$

Лемма 1. *Для любых функций g из A в B и f из B в C множество $f \circ g$ является функцией из A в C, причем $\operatorname{dom}(f \circ g) = g^{-1}(\operatorname{dom} f)$. Для каждого $a \in \operatorname{dom}(f \circ g)$ верно $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.*

Решение. Проверим свойство функциональности для множества $f \circ g$. Допустим, что $(a, c) \in f \circ g$ и $(a, c') \in f \circ g$. Тогда для некоторых $b, b' \in B$ имеем $(a, b) \in g$, $(a, b') \in g$, $(b, c) \in f$ и $(b', c') \in f$. В силу функциональности g, верно $b = b'$, откуда $(b, c') \in f$. По функциональности f, $c = c'$, как и требовалось.

Покажем, что $\operatorname{dom}(f \circ g) \subseteq g^{-1}(\operatorname{dom} f)$. Пусть $a \in \operatorname{dom}(f \circ g)$. Тогда существует $c \in C$, т. ч. $(a, c) \in f \circ g$, а значит, и $b \in B$, для которого $(a, b) \in g$ и $(b, c) \in f$. Второе условие влечет $b \in \operatorname{dom} f$. Тогда из первого следует $a \in g^{-1}(\operatorname{dom} f)$. Попутно заметим, что $b = g(a)$ и $c = f(b) = f(g(a))$.

Проверим, наконец, включение $g^{-1}(\operatorname{dom} f) \subseteq \operatorname{dom}(f \circ g)$. Допустим $a \in g^{-1}(\operatorname{dom} f)$. Тогда найдется $b \in \operatorname{dom} f$, т. ч. $(a, b) \in g$. С другой стороны, найдется $c \in C$, т. ч. $(b, c) \in f$. Эти два условия дают $(a, c) \in f \circ g$, откуда $a \in \operatorname{dom}(f \circ g)$. $\square$

Для всякого множества A определено *тождественное* отображение $\mathrm{id}_A \colon A \to A$. Именно,

$$\mathrm{id}_A = \{(a, a) \mid a \in A\}.$$

Легко видеть, что множество id_A, действительно, является отображением и даже биекцией.

Лемма 2 (разд. 7.5.3 Учебника)**.** *Для любой функции f из A в B верно*

$$f \circ \mathrm{id}_A = f \qquad \text{и} \qquad \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

Задача 10.1. Верно ли, что

a) композиция $f \circ g$ инъекции f и инъекции g является инъекцией?

b) композиция $f \circ g$ сюръекции f и сюръекции g является сюръекцией?

c) композиция $f \circ g$ сюръекции f и инъекции g является сюръекцией?

d) композиция $f \circ g$ инъекции f и сюръекции g является инъекцией?

Решение. **a)** Утверждение верно. Пусть $(a,c) \in f \circ g$ и $(a',c) \in f \circ g$. Тогда найдутся $b, b' \in B$, для которых $(a,b) \in g$, $(a',b') \in g$, $(b,c) \in f$ и $(b',c) \in f$. Из инъективности f заключаем $b = b'$, откуда $(a',b) \in g$ и $a = a'$ в силу инъективности g.

b) Утверждение верно. Рассмотрим произвольный элемент $c \in C$. В силу сюръективности функции f, найдется $b \in B$, для которого $(b,c) \in f$. Однако, так как сюръективна g, существует $a \in A$, т. ч. $(a,b) \in g$. Для этого a имеем $(a,c) \in f \circ g$. Таким образом, для каждого c существует a, т. ч. $(a,c) \in f \circ g$, что и требовалось.

c) Утверждение верно не для всех f и g. Рассмотрим множество $A = \{1\}$ и двухэлементное множество $B = \{a, b\}$. Определим функцию $g\colon A \to B$ так: $g(1) = a$. (Более формально, полагаем $g = \{(1,a)\}$.) Ясно, что g является инъекцией, но не сюръекцией. Положим $f = \mathrm{id}_B$. Функция f сюръекция, а функция $f \circ g = g$ не сюръекция.

d) Утверждение верно не для всех f и g. Рассмотрим множества A и B из предыдущего пункта. Определим функцию $g\colon B \to A$ так: $g = \{(a,1),(b,1)\}$. Ясно, что g сюръекция, но не инъекция. Положим $f = \mathrm{id}_A$. Видим, что f инъекция, но $f \circ g = g$ не является инъекцией. $\square$

Теорема 3 (ассоциативность композиции; разд. 7.5.2 Учебника)**.** *Для любых функций f из A в B, g из B в C и h из C в D верно*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Задача 10.2. Функции в этой задаче предполагаются всюду определенными. Говорят, что функция $g\colon B \to A$ является *левой обратной* (соответственно, *правой обратной*) к функции $f\colon A \to B$, если $g \circ f = \mathrm{id}_A$ (соответственно, $f \circ g = \mathrm{id}_B$).

a) Приведите примеры, когда левая обратная не является правой обратной и когда правая обратная не является левой.

b) Может ли такое случиться для конечных множеств?

c) Может ли быть так, что у одной функции есть и левая, и правая обратные, но они различны?

d) Для каких функций существует левая обратная?

e) Для каких функций существует правая обратная?

Решение. **a)** Рассмотрим произвольную сюръекцию $f\colon A \to B$, не являющуюся инъекцией. (Существование таковых было установлено в решении задачи 10.1). Определим функцию $g\colon B \to A$ следующим образом:

$$g(b) = \text{какой-либо элемент множества } f^{-1}(\{b\}).$$

В силу сюръективности, при всех $b \in B$ множества $f^{-1}(\{b\})$ непусты, так что g всюду определена.[1]

[1] Отметим, что в более формальном контексте утверждение о *существовании* такой функции g для произвольной сюръекции f — т. е. что допустимо строить новые множества *равномерным* (для всех b, сколь бы много их ни было) «произвольным», никак более не определенным выбором элементов в пару каждому b — не зависит от других естественных постулатов о существовании множеств и эквивалентно знаменитой *аксиоме выбора*.

Покажем, что g является правой обратной к f. Достаточно установить, что $(f \circ g)(b) = b$ для всех $b \in B$. Функции f и g всюду определены, так что $(f \circ g)(b) = f(g(b))$. Однако, $g(b) \in f^{-1}(\{b\})$, откуда $f(g(b)) \in \{b\}$, т.е. $f(g(b)) = b$, как и требовалось.

Что бы установить, что правая обратная g не является также левой, достаточно показать, что левой обратной к f не существует.

Допустим противное: $h \circ f = \mathrm{id}_A$ для некоторой $h \colon B \to A$. Поскольку f не является инъекцией, найдутся $a, a' \in A$, т.ч. $a \neq a'$, но $f(a) = f(a')$. Тогда

$$a = (h \circ f)(a) = h(f(a)) = h(f(a')) = (h \circ f)(a') = a',$$

что не так. Следовательно, левой обратной к f не существует.

Укажем пример, когда существует левая обратная, но не правая. Рассмотрим произвольную инъекцию $f \colon A \to B$, где $A \neq \varnothing$, не являющуюся сюръекцией. (Пример приводился в решении задачи 10.1). Выберем некоторый $a_0 \in A$. Определим функцию $g \colon B \to A$ следующим образом:

$$g(b) \quad = \quad \begin{cases} a, & \text{если существует } a \in A \text{, т.ч. } f(a) = b; \\ a_0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение функции g корректно: для всякого $b \in B$ существует не более одного такого элемента $a \in A$, что $f(a) = b$. Также ясно, что $g \colon B \to A$ всюду определена.

Покажем, что $(g \circ f)(a) = a$ для всех $a \in A$. Для $b = f(a)$ имеем $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a$. Итак, g есть левая обратная к f.

Остается проверить, что f не имеет правой обратной. Пусть, напротив, $f \circ h = \mathrm{id}_B$ для некоторой $h \colon B \to A$. Поскольку f не является сюръекцией, существует $b' \in B$, т.ч. не существует $a \in A$, для которого $f(a) = b'$. С другой стороны, $b' = (f \circ h)(b') = f(h(b'))$, причем $h(b') \in A$. Противоречие.

b) Примеры из задачи 10.1, использованные в предыдущем пункте, построены для конечных множеств A и B. (Очевидно, множества f и g тогда тоже конечны).

c) Если у функции $f \colon A \to B$ есть левая обратная $g' \colon B \to A$ и правая обратная $g'' \colon B \to A$, эти обратные необходимо совпадают в силу теоремы 3:

$$g'' = \mathrm{id}_A \circ g'' = (g' \circ f) \circ g'' = g' \circ (f \circ g'') = g' \circ \mathrm{id}_B = g'.$$

d) В первом пункте мы, фактически, показали, что у любой инъекции $f \colon A \to B$ при $A \neq \varnothing$ есть левая обратная. Кроме того мы видели, что у сюръективной неинъекции нет левой обратной — сюръективность в том рассуждении не использовалась, так что у любой не инъективной функции левой обратной нет.

Остается изучить вырожденный случай $A = \varnothing$. Тогда $f \subseteq A \times B = \varnothing \times B = \varnothing$, т.е. $f = \varnothing$ (заметим, что пустое множество пар, действительно, является всюду определенной функций из пустого множество в какое бы то ни было). Предположим, что f имеет левую обратную $g \colon B \to A$. Если $b \in B$, то, поскольку g должна быть всюду определена, $g(b) \in A$, что невозможно. Значит, $B = \varnothing$. Обратно, если $B = \varnothing$, для функции $g \colon B \to A$, т.ч. $g = \varnothing$, имеем $g \circ f = \varnothing = \mathrm{id}_\varnothing = \mathrm{id}_B$.

Итак, функция $f\colon A \to B$ имеет левую обратную тогда и только тогда, когда f является инъекцией из A в B, причем $A \neq \varnothing$ или $B = \varnothing$.

e) Рассуждения первого пункта показывают, что функция $f\colon A \to B$ имеет правую обратную тогда и только тогда, когда f является сюръекцией из A в B. $\square$

Теорема 4 (разд. 7.6 Учебника)**.** *Пусть* $|A| = m$ *и* $|B| = n$, $\mathrm{Inj}(m,n)$ *есть число инъективных отображений из множества* A *во множество* B *и* $\mathrm{Surj}(m,n)$ *есть число сюръективных отображений из* A *в* B.

Если $m > n$, *то*

$$\mathrm{Surj}(m,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m \qquad \textit{и} \qquad \mathrm{Inj}(m,n) = 0.$$

Если $m < n$, *то*

$$\mathrm{Surj}(m,n) = 0 \qquad \textit{и} \qquad \mathrm{Inj}(m,n) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Наконец,

$$\mathrm{Surj}(n,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n = \mathrm{Inj}(n,n) = n!\,.$$

Задача 10.3. Чего больше: инъективных отображений 10-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 10-элементное?

Решение. Теорема 4 позволяет явно вычислить количества тех и других. Однако, соответствующие вычисления громоздки и требуют привлечения компьютера. Дадим менее трудоемкое решение.

Имеем $\mathrm{Inj}(10,20) = \frac{20!}{10!}$. Обозначим S число таких сюръективных отображений 20-элементного множества A в 10-элементное множество B, что *в каждый элемент* B *переходят ровно два различных элемента* A (формально: прообраз каждого одноэлеменого подмножества множества B имеет мощность 2).

Отображений указанного вида имеется ровно

$$S = \binom{20}{2} \cdot \binom{18}{2} \cdot \binom{16}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}.$$

В самом деле, если $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{10}\}$, то два элемента, переходящие в b_1, можно выбрать $\binom{20}{2}$ способами; среди оставшихся восемнадцати элементов прообраз множества $\{b_2\}$ можно выбрать $\binom{18}{2}$ способами и т. д. Получаем

$$S = \frac{20!}{2^{10}}.$$

Нетрудно показать (например, индукцией по n установив $2^n < n!$ для всех $n > 3$), что $2^{10} < 10!$. Значит,

$$\mathrm{Surj}(20, 10) \geqslant S = \frac{20!}{2^{10}} > \frac{20!}{10!} = \mathrm{Inj}(10, 20).$$

□

Задача 10.4. Пусть f — инъективное отображение 10-элементного множества A в 12-элементное множество B. Сколько есть таких функций g (не обязательно всюду определенных) из множества B в множество A, что $g \circ f = \mathrm{id}_A$?

Решение. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$. Положим $b_i = f(a_i)$ для всех натуральных $i \leqslant 10$. Вследствие инъективности f, все эти b_i попарно различны. Можно тогда считать, что $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{10}, b_{11}, b_{12}\}$. При $i \leqslant 10$ имеем $a_i = (g \circ f)(a_i) = g(f(a_i)) = g(b_i)$ для всех подходящих функций g.

Обратно, если для некоторой функции g из B в A верно $g(b_i) = a_i$ для всех $i \leqslant 10$, то такая g подходящая.

Как может вести себя подходящая функция g на элементах b_{11} и b_{12}? Имеется 11 вариантов для каждого из элементов: g не определена или же принимает одно из значений $a_1, \ldots, a_{10}$. Таким образом, существует ровно 11^2 подходящих функций. □

Используя интуитивное понятие о конечных множествах и числе их элементов, нетрудно доказать, что для конечных A_1, A_2 и A_3 верно

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

и

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Теорема 5 (формула включений и исключений; разд. 6.4 Учебника)**.** *Если множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где $n \in \mathbb{N}$, конечны, то*

$$\Big|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \Big|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big|,$$

или, в менее сжатой записи,

$$
\begin{gathered}
|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \\
\sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \ldots \\
+ (-1)^{n-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}| = \\
\big(|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|\big) - \big(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|\big) + \\
+ \big(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|\big) - \ldots \\
+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.
\end{gathered}
$$

Лемма 6. *Если множества A конечно и $B \subseteq A$, то B конечно и $|B| \leqslant |A|$. Если при этом $|B| = |A|$, то $B = A$.*

Доказательство. Первое утверждение интуитивно очевидно, а строгое его доказательство потребует уточнения понятий конечного множества и числа его элементов.

Установим второе утверждение. Имеем $A = B \cup (A \setminus B)$. По формуле включений и исключений,

$$
|B| = |A| = |B \cup (A \setminus B)| = |B| + |A \setminus B| + |B \cap (A \setminus B)|.
$$

Поскольку $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$, имеем $|B \cap (A \setminus B)| = 0$, откуда $|A \setminus B| = 0$ и $A \setminus B = \varnothing$. Но тогда $A = B \cup (A \setminus B) = B \cup \varnothing = B$. $\square$

Задача 10.5. A_1, A_2, A_3 — подмножества конечного множества X. Известно, что

$$
\begin{array}{llll}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 11, & |A_1| = 8, & |A_2| = 4, & |A_3| = 4, \\
|A_1 \cap A_2| = 2, & |A_2 \cap A_3| = 1, & & |A_1 \cap A_3| = 3.
\end{array}
$$

Верно ли, что $A_2 \cap A_3 \subseteq A_1$?

Решение. По формуле включений и исключений получаем, что $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$. Имеем $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3|$, причем $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \subseteq A_2 \cap A_3$. По лемме 6, заключаем $A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = A_2 \cap A_3$, что, как мы знаем из леммы 4 Занятия 8, влечет $A_2 \cap A_3 \subseteq A_1$. $\square$

Задача 10.6. A_1, A_2, A_3, A_4 — подмножества конечного множества X. Известно, что в каждом из этих множеств 15 элементов; в пересечении любой пары этих множеств 6 элементов; в пересечении любой тройки — 2 элемента. Каково наименьшее количество элементов в множестве X?

Решение. Имеется ровно $\binom{4}{2} = 6$ неупорядоченных пар различных наших множеств A_i, A_j (и, очевидно, столько же упорядоченных по возрастанию пар индексов (i,j)). Также есть $\binom{4}{3} = 4$ тройки. Тогда формула включений и исключений дает:

$$|X| \geqslant |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4 \cdot 15 - 6 \cdot 6 + 4 \cdot 2 - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \\ 32 - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

С другой стороны, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \subseteq A_1 \cap A_2 \cap A_3$, причем $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2$. Таким образом, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \leqslant 2$, откуда $|X| \geqslant 30$.

Покажем, что значение $|X| = 30$ действительно может быть достигнуто. Мы *предположим*, что подходящие X, A_1, A_2, A_3, A_4 существуют, и поймем как они должны быть устроены. После станет ясно, как построить подходящие множества, а доказательство того, что они в самом деле подходящие, будет прямой проверкой.[2]

Итак, если $|X| = 30$, имеем $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2$, откуда, в силу леммы 6, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = A_i \cap A_j \cap A_k$ для всех $i < j < k$. Кроме того, $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Будем, для краткости, писать $A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4$ вместо $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4$ и т. п. Имеем

$$15 = |A_1| \geqslant |A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_1A_4| = 3 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + 2 = 14.$$

(Мы использовали $A_1A_i \cap A_1A_j = A_1A_iA_j = A_1A_2A_3A_4$.) Итак, во множестве A_1 лишь один элемент не принадлежит ни одному из A_2, A_3, A_4, т. е. $|A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4| = 1$. Далее,

$$6 = |A_1A_2| \geqslant |A_1A_2A_3 \cup A_1A_2A_4| = 2 + 2 - 2 = 2,$$

откуда $A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4 = 4$. В силу симметричности нашего условия, аналогичный анализ проходит и для других множеств A_i.

Теперь видно, что можно, например, положить:

$$\begin{aligned}
&X = \{1, \ldots, 30\} \\
&A_1 = \{1\} \cup \{2,3,4,5\} \cup \{6,7,8,9\} \cup \{10,11,12,13\} \cup \{14,15\} \\
&A_2 = \{2,3,4,5\} \cup \{14,15\} \cup \{16\} \cup \{17,18,19,20\} \cup \{21,22,23,24\} \\
&A_3 = \{6,7,8,9\} \cup \{14,15\} \cup \{17,18,19,20\} \cup \{25\} \cup \{26,27,28,29\} \\
&A_4 = \{10,11,12,13\} \cup \{14,15\} \cup \{21,22,23,24\} \cup \{26,27,28,29\} \cup \{30\}.
\end{aligned}$$

□

Задача 10.7. Сколько неотрицательных целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ удовлетворяют неравенствам $x_i \leqslant 3$ при всех i?

Решение. Как мы знаем из Занятия 2, всего у данного уравнения имеется ровно $\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3}$ (неотрицательных целочисленных) решений («задача Муавра»). Пусть A_i есть множество решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_i \geqslant 4. \end{cases}$$

[2] Логически это похоже на решение уравнений с помощью неэквивалентых преобразований, когда из допущения о существовании корней мы выводим, что корнями могут быть лишь такие-то числа, а затем прямой подстановкой выявляем и удаляем лишние «корни».

Нам также известно, что $|A_i| = \binom{10-4+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$. Нетрудно видеть, что $A_i \cap A_j$ (при $i \neq j$) есть множество решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_i \geqslant 4 \\ x_j \geqslant 4. \end{cases}$$

Поэтому $|A_i \cap A_j| = \binom{10-4-4+4-1}{4-1} = \binom{5}{3}$. Аналогично, $A_i \cap A_j \cap A_k$ при попарно различных i, j, k есть множество решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_i \geqslant 4 \\ x_j \geqslant 4 \\ x_k \geqslant 4. \end{cases}$$

Очевидно, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0$. Отсюда следует $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$. Применяя формулу включений и исключений, находим

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4 \cdot \binom{9}{3} - 6 \cdot \binom{5}{3} = 276.$$

С другой стороны, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ есть множество всех тех и только тех решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, которые не удовлетворяют какому-либо из неравенств $x_i \leqslant 3$. Следовательно, всем этим неравенствам удовлетворяют ровно

$$\binom{13}{3} - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 286 - 276 = 10$$

решений. $\square$