Занятие 17

Заметим сразу, что приводимые нами далее доказательства утверждений из Лекций — особенно, в леммах 7, 9 и теореме 21 — не требуется (но и не возбраняется) заучивать и «сдавать».

Эти рассуждения призваны уточнить для желающих используемые в «лекционных» доказательствах неформальные идеи, такие как число элементов, пересчет членов подпоследовательности, «вычеркивание» членов последовательности т.п. Уточняя, мы пытаемся выразить все подобные вещи («можно пересчитать») в терминах существования некоторых множеств («существует инъекция») и, в частности, отображений.

Одну из главных ролей при этом играет *аксиома выбора*, с которой мы уже имели дело в Занятии 10. Неформальный смысл аксиомы таков: пусть о произвольном множестве «испытаний» известно лишь, что для каждого из них есть проходящий это «испытание» «объект»; тогда имеется функция, назначающая каждому «испытанию» какой-нибудь проходящий его «объект». С философской точки зрения, можно сказать, что какими бы сложными и многочисленными «испытания» ни были, понятие функции достаточно выразительно, чтобы описать, как пройти их все.

Велико искушение задать значения функции «одно за другим», каждый раз используя наличие подходящего «объекта». Это удается корректно проделать для любого конечного числа «испытаний».

В бесконечном же случае требуется некоторая форма «индукции», и составляющая один из смыслов аксиомы. Получается нетривиальное утверждение, которое не удается вывести из других разумных аксиом.

Точная формулировка аксиомы выбора такая. Пусть множество X таково, что $\varnothing \notin X$. Тогда существует отображение $g\colon X \to \cup X$, такое что $g(x) \in x$ для всех $x \in X$. (Например, если X какое-то множество кругов на плоскости, функция g ставит в соответствие каждому кругу некоторую лежащую в нем точку.)

В заключение, отметим, что в ряде мест мы все равно не идем до конца, хотя и стараемся указывать, что именно принимаем на веру.

Напомним, что *множество натуральных чисел* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ мы рассматриваем как неопределяемый объект, чьи основные свойства (прежде всего, *принцип индукции*) постулируются. Такой подход позволяет построить довольно аккуратную теорию конечных множеств, уточнив понятие «числа элементов» и обосновав многие «очевидные» свойства.[1]

Мы говорим, что множества A и B *равномощны* (или, *эквивалентны*), если существует биекция $f\colon A \to B$. Тогда пишем $A \overset{f}{\sim} B$ или, просто, $A \sim B$.

[1]Задача такого обоснования значима хотя бы потому, что сводя свойства конечных множеств к принципу индукции, мы уменьшаем число нужных «аксиом».

Лемма 1 (см. Лекции). *Для любых множеств A, B и C верно*

1. $A \sim A$;

2. *если* $A \sim B$, *то* $B \sim A$;

3. *если* $A \sim B$ *и* $B \sim C$, *то* $A \sim C$.

Доказательство. Достаточно заметить, что id_A, обратная функция к биекции и композиция двух биекций являются биекциями соответствующих множеств. $\square$

По определению, для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$[n] = \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}.$$

Имеем, в частности, $[0] = \varnothing$ и $[n+1] = [n] \cup \{n\}$. Множество A называется *конечным*, если найдется $n \in A$, т. ч. $A \sim [n]$. В противном случае, множество называется *бесконечным*. Множество A *счетное*, если $A \sim \mathbb{N}$. Легко заметить, что введенные понятия устойчивы относительно равномощности: множество, равномощное конечному, конечно и т. п.

Напомним, что если отображения $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$ суть инъекции, то их композиция $g \circ f\colon A \to C$ тоже инъекция (см. Задачу 10.1). Если $A \subseteq B$, будем называть *тривиальной* инъекцией отображение $h\colon A \to B$, т. ч. $h(a) = a$ для всех $a \in A$.

Теорема 2. *Ни для какого $n \in \mathbb{N}$ не существует инъекции $f\colon [n+1] \to [n]$.*

Доказательство. Индукция по $n \in \mathbb{N}$. Пусть $n = 0$. Допустим, что инъекция f существует. Тогда f является всюду определенной функцией из $[1] = \{0\}$ в $[0] = \varnothing$ и, в частности, $f(0) \in \varnothing$, что неверно.

Предположим, что для некоторого n не существует инъекций $[n+1] \to [n]$, но существует инъекция $f\colon [n+2] \to [n+1]$. Рассмотрим отображение $g\colon [n+1] \to [n+1]$, т. ч.

$$g(x) \quad = \quad \begin{cases} f(n+1), & \text{если } x = n; \\ n, & \text{если } x = f(n+1); \\ x & \text{иначе.} \end{cases}$$

Т.е. g переставляет числа n и $f(n+1) \leqslant n$, оставляя прочие элементы $[n+1]$ на месте. Это биекция. Рассмотрим также тривиальную инъекцию $h\colon [n+1] \to [n+2]$. Отображение $g \circ f\colon [n+2] \to [n+1]$, как композиция инъекций, является инъекцией. Заметим, что $(g \circ f)(n+1) = g(f(n+1)) = n$. Следовательно, для всех $x \in [n+1]$ имеем $(g \circ f \circ h)(x) \neq n$, т. е. $g \circ f \circ h$ есть инъекция $[n+1] \to [n]$, каковой не существует. Противоречие. $\square$

Следствие 3 (принцип Дирихле). *При любых $n, m \in \mathbb{N}$, если $n > m$, не существует инъекции $f\colon [n] \to [m]$.*

Доказательство. Допустим, что такая инъекция f существует. Имеем $n \geqslant m+1$. Рассмотрим тривиальную инъекцию $h\colon [m+1] \to [n]$. Отображение $f \circ h\colon [m+1] \to [m]$ тоже является инъекцией, вопреки теореме 2. $\square$

Следствие 4 (см. Лекции)**.** *При любых $n, m \in \mathbb{N}$, если $n \neq m$, не существует биекции $f\colon [n] \to [m]$.*

Как видим, для каждого конечного множества A, число $n \in \mathbb{N}$, для которого $A \sim [n]$, единственно. Это число называется *мощностью*, или *числом элементов* множества A. В таком случае пишут $|A| = n$.

Лемма 5. *Если существует инъекция $f\colon \mathbb{N} \to A$, то множество A бесконечно.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существует инъекция $g\colon A \to [n]$. Рассмотрим тривиальную инъекцию $h\colon [n+1] \to \mathbb{N}$. Тогда отображение $g \circ f \circ h\colon [n+1] \to [n]$ будет инъекцией, вопреки теореме 2. $\square$

Следствие 6. *Всякое счетное множество бесконечно.*

Лемма 7 (см. менее формальное д-во в Лекциях)**.** *Если множество A бесконечно, то существует инъекция $f\colon \mathbb{N} \to A$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}_*(A)$ есть множество всех *непустых* подмножеств множества A. Кажется ясным (а с формальной точки зрения, приходится постулировать[2]), что существует отображение $g\colon \mathcal{P}_*(A) \to A$ со свойством $g(X) \in X$. Иначе говоря, «функция выбора» g *выбирает* некоторый элемент из каждого непустого подмножества $X \subseteq A$.

Рассмотрим последовательность подмножеств $A_n \subseteq A$ для всех $n \in \mathbb{N}$ со свойством

$$\begin{aligned} A_0 &= A; \\ A_{n+1} &= \begin{cases} A_n \setminus \{g(A_n)\}, & \text{если } A_n \neq \varnothing; \\ \varnothing & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

(Строго говоря, существование и единственность такой последовательности доказывается индукцией по $n \in \mathbb{N}$ (*теорема о рекурсии*). Доказательство не сложно, но весьма занудно.)

Функция f из $\mathbb{N}$ в A со свойством $f(n) = g(A_n)$ (быть может, не всюду определенная), инъективна. В самом деле, иначе $g(A_m) = g(A_n) \in A_n$ при каких-то $n > m$. Покажем, что при $n > m$ всегда $g(A_m) \notin A_n$, индукцией по n. Допустим, что $n+1 > m$, $g(A_m) \in A_{n+1}$, а для n утверждение верно. Тогда $m = n$ или $m < n$. В первом случае,

$$g(A_n) = g(A_m) \in A_{n+1} = A_n \setminus \{g(A_n)\}.$$

[2]Более тонкие рассуждения позволяют обойтись в доказываемой лемме лишь счетной аксиомой выбора: выбираем для каждого n какую-нибудь инъекцию $f_n\colon [n] \to A$, а затем действуем, как в доказательстве теоремы 21.

Противоречие. Пусть теперь $n > m$; тогда

$$g(A_m) \in A_{n+1} = A_n \setminus \{g(A_n)\} \subseteq A_n,$$

вопреки предположению индукции.

Если все множества A_n непусты, функция f всюду определена и является искомой инъекцией.

Допустим теперь, что не все A_n непусты. Рассмотрим наименьшее такое $n \in \mathbb{N}$, что $A_n = \varnothing$ (оно существует в силу принципа наименьшего числа, эквивалентного принципу индукции). Мы утверждаем, что тогда $A \sim [n]$ вопреки условию бесконечности.

Действительно, если $n = 0$, то $A = A_0 = \varnothing = [0]$. Иначе $n > 0$. Пусть $h\colon [n] \to \mathbb{N}$ есть тривиальная инъекция. Тогда $f \circ h\colon [n] \to A$ тоже инъекция. Убедимся, что это также и сюръекция. В противном случае найдется $a \in A$, т. ч. $a \neq g(A_k)$ для всех $k \in [n]$. Но тогда $a \in A_k$ для всех $k \in [n]$ (индукция по $k \in [n]$). Поскольку $A_n = A_{n-1} \setminus \{g(A_{n-1})\}$ и $a \neq g(A_{n-1})$, имеем $a \in A_n = \varnothing$. Противоречие.

□

Следствие 8 (см. Лекции)**.** *Если множество A бесконечно, то существует счетное множество $B \subseteq A$.*

Доказательство. Легко показать, что если $g\colon X \to Y$ есть инъекция и $Z \subseteq X$, то $Z \sim g(Z)$. Поэтому, в обозначениях леммы 7, достаточно положить $B = f(\mathbb{N})$. □

Лемма 9. *Если $B \subseteq \mathbb{N}$ и B бесконечно, то B счетно.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность подмножеств $B_n \subseteq \mathbb{N}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ со свойством

$$\begin{aligned} B_0 &= B; \\ B_{n+1} &= \begin{cases} B_n \setminus \{\min B_n\}, & \text{если } B_n \neq \varnothing; \\ \varnothing & \text{иначе} \end{cases} \end{aligned}$$

(формально, опять применяя теорему о рекурсии и еще принцип наименьшего числа). Подобно доказательству леммы 7, убеждаемся сначала, что функция f из $\mathbb{N}$ в B с условием $f(n) = \min B_n$, инъективна (действительно, минимум тоже «функция выбора», так как по принципу наименьшего числа для всех непустых $X \subseteq \mathbb{N}$ существует $\min X \in X$). Затем показываем, что все B_n непусты (иначе B конечно), а значит, f есть (всюду определенная) инъекция $\mathbb{N} \to B$.

Остается убедиться, что f сюръективна (это отличает наш случай от ситуации леммы 7). Несложное рассуждение по индукции показывает, что $B_{n+1} \subseteq B_n \subseteq B$ и $f(n+1) > f(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Далее, предположим, что найдется $b \in B \subseteq \mathbb{N}$, т. ч. $b \notin f(\mathbb{N})$. Рассмотрим *наименьший* такой b. Индукцией легко показать, что $b \in B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $b = \min B$, то, очевидно, $b = f(0)$. Допустим, что $b > \min B$. Тогда в B найдется элемент $b' < b$. Возьмем *наибольший*[3] такой b'. По выбору b, верно $b' \in f(\mathbb{N})$, т.е. $b' = f(n) = \min B_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f(n+1) = \min B_{n+1} = b$. В самом деле, $b \in B_{n+1}$, откуда $\min B_{n+1} \leqslant b$ и $\min B_{n+1} = f(n+1) > f(n) = b'$. Но строго между b' и b нет элементов множества B, а значит, $\min B_{n+1} = b$. $\square$

Следствие 10. *Если множество A бесконечно и существует инъекция $f\colon A \to \mathbb{N}$, то A счетно.*

Доказательство. Заметив $A \sim f(A) \subseteq \mathbb{N}$, применим лемму 9. $\square$

Следствие 11 (см. менее формальное д-во в Лекциях)**.** *Если множество A счетно и $B \subseteq A$, то B конечно или счетно.*

Доказательство. Допустим, что B бесконечно. Существует инъекция $f\colon A \to \mathbb{N}$. Пусть $h\colon B \to A$ есть тривиальная инъекция. Тогда отображение $f \circ h\colon B \to \mathbb{N}$ тоже инъекция. По следствию 10, множество B счетно. $\square$

Лемма 12. *Если множество B бесконечно и $B \subseteq A$, то A бесконечно.*

Доказательство. В силу леммы 7, существует инъекция $f\colon \mathbb{N} \to B$. Пусть $g\colon B \to A$ тривиальная инъекция. Имеем инъекцию $g \circ f\colon \mathbb{N} \to A$, что, согласно лемме 5, влечет бесконечность A. $\square$

Следствие 13. *Если множество A конечно и $B \subseteq A$, то B конечно.*

Теорема 14 (правило суммы; см. Лекции)**.** *Пусть множества A и B конечны, причем $|A| = n$ и $|B| = m$, и $A \cap B = \varnothing$. Тогда множество $A \cup B$ конечно, причем $|A \cup B| = n + m$.*

Доказательство. Пусть имеются биекции $f\colon [n] \to A$ и $g\colon [m] \to B$. Явно укажем биекцию $h\colon [n+m] \to A \cup B$. Именно, положим

$$h(x) \quad = \quad \begin{cases} f(x), & \text{если } x < n; \\ g(x-n), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $h(x_1) = h(x_2)$. Если $x_1, x_2 < n$, то $x_1 = x_2$ по инъективности f. Если же $n \leqslant x_1, x_2$, имеем $g(x_1 - n) = g(x_2 - n)$, откуда $x_1 - n = x_2 - n$ по инъективности g, и $x_1 = x_2$ в силу свойств вычитания. Допустим теперь $x_1 < n \leqslant x_2$. Но тогда $h(x_1) = f(x_1) \in A$ и $h(x_1) = h(x_2) = g(x_2 - n) \in B$, хотя $A \cap B = \varnothing$. Следовательно, отображение h инъективно.

Установим сюръективность. Если $a \in A$, то $a = f(n')$ для некоторого $n' < n$. Но тогда $h(n') = f(n') = a$. Если $b \in B$, то $b = g(m')$ для некоторого $m' < m$. Но тогда $h(n + m') = g((n + m') - n) = g(m') = b$. $\square$

[3] Разумеется, нужно доказывать, что в ограниченном непустом множестве X натуральных чисел есть наибольший элемент. Это несложно: нужно взять наименьшее s со свойством $s \geqslant x$ для всех $x \in X$ (наименьшую *верхнюю грань* множества X). Если $s = 0$, то это и есть наибольший элемент. Иначе, число $s - 1$ уже не будет верхней гранью, а значит, s принадлежит множеству X, являясь в нем наибольшим.

Следствие 15. *Если множества A и B конечны, то множества $A \cup B$ и $A \cap B$ тоже конечны, причем имеет место равенство*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Доказательство. Имеем $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ и $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.

Множества $A \setminus B$ и $A \cap B$ конечны как подмножества конечного множества A; множество $B \setminus A$ конечно как подмножество конечного B. Множества $A \setminus B$, $A \cap B$ и $B \setminus A$ попарно не пересекаются. Поэтому $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$, $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$ и, для конечного $A \cup B$,

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| = \\ (|A| - |A \cap B|) + (|B| - |A \cap B|) + |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

□

Теорема 16 (правило произведения)**.** *Пусть множества A и B конечны, причем $|A| = n$ и $|B| = m$. Тогда множество $A \times B$ конечно, причем $|A \times B| = nm$.*

Доказательство. Пусть имеются биекции $f\colon A \to [n]$ и $g\colon B \to [m]$. Если $m = 0$ (т. е. $B = \varnothing$), имеем по определению $A \times B = \varnothing \sim [0]$. Пусть $m \neq 0$. Явно укажем биекцию $h\colon A \times B \to [nm]$. Именно, положим

$$h(a, b) = mf(a) + g(b)$$

для всех $a \in A$ и $b \in B$. Проверим сюръективность. Пусть $k \in [nm]$. Как мы знаем из теоремы о делении с остатком (Занятие 6, теорема 1), существуют натуральные числа q и r, т. ч. $k = mq + r$, причем $r \in [m]$. Следовательно, найдется $b \in B$, т. ч. $r = g(b)$. Имеем $q \in [n]$, поскольку иначе $k \geqslant nm$, а значит, найдется и $a \in A$, для которого $q = f(a)$. Итак, $h(a, b) = k$.

Иинъективность получается из единственности остатка. Действительно, пусть $mf(a) + g(b) = mf(a') + g(b') = k = mq + r$. Поскольку $g(b), g(b') \in [m]$, имеем $g(b) = r = g(b')$. Отсюда $mf(a) = mf(a')$ и, в силу $m \neq 0$, $f(a) = f(a')$. По инъективности f и g, получаем $a = a'$ и $b = b'$. □

Следствие 17. *Если множество A конечно, то при любом $n \in \mathbb{N}$ множество A^n конечных последовательностей*[4] *длины n конечно, причем $|A^n| = |A|^n$.*

Доказательство. Множество A^0, по определению, состоит только из пустой последовательности, так что $|A^0| = 1 = |A|^0$. Далее применяем индукцию по n. При $n = 1$ имеем $A^1 \sim A$. Сделаем предположение для n. Заметим, что $A^{n+1} \sim A^n \times A$ (в самом деле, последовательности длины $n + 1$ однозначно задаются парами из начала длины n и последнего элемента). По предположению индукции, A^n конечно, причем $|A^n| = |A|^n$. В силу теоремы 16, множество A^{n+1} конечно, причем $|A^{n+1}| = |A^n| \cdot |A| = |A|^n \cdot |A| = |A|^{n+1}$. □

[4] Уточняя, можно сказать, что последовательности длины n суть просто отображения $[n] \to A$.

Лемма 18 (см. Лекции)**.** *Множества* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}$ *равномощны.*

Доказательство. Биекцию $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ легко указать явно. Положим

$$f(n, m) = 2^n \cdot (2m + 1) - 1.$$

Проверим, что это инъекция. Пусть $f(n, m) = f(n', m')$, т. е. $2^n \cdot (2m+1) = 2^{n'} \cdot (2m' + 1)$. Это число больше нуля, так что существует максимальная степень двойки, его делящая. Поскольку $2m + 1$ и $2m' + 1$ на 2 не делятся, эта степень равна $n = n'$. Имеем, далее, $2m + 1 = 2m' + 1$, откуда $m = m'$. Итак, $(n, m) = (n', m')$.

Проверим сюръективность. Для произвольного $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим число $k + 1 \geqslant 1$. Существует максимальная степень двойки n, делящая $k + 1$. Частное от этого деления нечетно и имеет вид $2m + 1$. Так что $k + 1 = 2^n \cdot (2m + 1) = f(n, m) + 1$. □

Следствие 19 (см. Лекции)**.** *Если множества* A *и* B *счетны, то множество* $A \times B$ *счетно.*

Доказательство. Пусть, согласно лемме 18, $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \overset{f}{\sim} \mathbb{N}$. Пусть также $A \overset{g_1}{\sim} \mathbb{N}$ и $B \overset{g_2}{\sim} \mathbb{N}$. Рассмотрим отображение $h\colon A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, т. ч.

$$h(a, b) = (g_1(a), g_2(b)),$$

для всех $a \in A$ и $b \in B$. Проверка биективности h оставляется читателю. Биекция $f \circ h\colon A \times B \to \mathbb{N}$ является искомой. □

Следствие 20 (см. Лекции)**.** *Если множество* A *счетно, то при любом целом положительном* n *множество* A^n *конечных последовательностей длины* n *счетно (а множество* A^0 *конечно).*

Доказательство. Рассуждаем, как в доказательстве следствия 17. Имеем $A^{n+1} \sim A^n \times A$ и, по предположению индукции, $A^n \sim \mathbb{N}$. Тривиальная проверка показывает, что если $X \sim X'$ и $Y \sim Y'$, то $X \times Y \sim X' \times Y'$. Итак, $A^{n+1} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. В силу леммы 19, $A^{n+1} \sim \mathbb{N}$. □

Теорема 21 (см. Лекции)**.** *Пусть множество* I *конечно или счетно, и для всех* $i \in I$ *множества* A_i *конечны или счетны. Тогда множество* $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ *конечно или счетно.*

Доказательство. Раз множество I конечно или счетно, существует инъекция $h\colon I \to \mathbb{N}$. Также для каждого $i \in I$ существует некоторая инъекция $g_i\colon A_i \to \mathbb{N}$. Рассмотрим еще отображение $j\colon A \to I$, заданное условием

$$j(a) = k \text{ т. ч. } h(k) = \min\{h(i) \mid a \in A_i\}.$$

Принцип наименьшего числа и инъективность h обеспечивают, в самом деле, что h функционально и всюду определено. Неформально, $j(a)$ есть наименьший «номер» $i \in I$, т. ч. множество A_i содержит a, — только сравниваются на сами i, а их образы $h(i) \in \mathbb{N}$. В частности, всегда $a \in A_{j(a)}$.

Рассмотрим отображение[5] $f\colon A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, т. ч.

$$f(a) = (h(j(a)), g_{j(a)}(a))$$

для всех $a \in A$. Покажем, что это инъекция. Действительно, если $h(j(a)) = h(j(a'))$, то $j(a) = j(a') = k$, т. е. a и a' оба принадлежат некоторому A_k. С другой стороны, мы имеем $g_k(a) = g_k(a')$, откуда $a = a'$.

Пользуясь леммой 18, получаем инъекцию $A \to \mathbb{N}$, существование которой влечет конечность или счетность множества A в силу следствия 10. □

Следствие 22 (см. Лекции)**.** *Если множества A и B конечны или счетны, причем хотя бы одно из них бесконечно, то множество $A \cup B$ счетно.*

Доказательство. Взяв $I = [2] = \{0, 1\}$, $A_0 = A$ и $A_1 = B$, по теореме 21 получаем, что $A \cup B$ конечно или счетно. Пусть, без ограничения общности, A бесконечно. В силу $A \subseteq A \cup B$ и леммы 12, множество $A \cup B$ бесконечно, а значит, счетно. □

Теорема 23 (см. Лекции)**.** *Пусть множество $A \neq \varnothing$ конечно или счетно. Тогда счетно множество $A^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ всевозможных конечных последовательностей элементов множества A (или, как говорят, «множество слов над алфавитом A»).*

Доказательство. Согласно следствиям 17 и 20, множества A^n конечны или счетны при всех $n \in \mathbb{N}$. По теореме 21, конечно или счетно множество A^*. Покажем, что A^* бесконечно, а значит, счетно. Существует некоторое $a \in A$. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{N} \to A^*$, т. ч. $f(0)$ есть пустая последовательность и

$$f(n + 1) = f(n)a.$$

Иначе говоря, $f(n) = \underbrace{aa\ldots a}_{n}$. Ясно, что f является инъекций: длины получающихся последовательностей строго возрастают.[6] Значит, в силу леммы 5, множество A бесконечно. □

Задача 17.1. Докажите, что множество простых чисел счетно.

Решение. Множество простых чисел P есть подмножество множества $\mathbb{N}$. Согласно следствию 11, множество P конечно или счетно. Допустим, что P конечно, т. е. $P \sim [n]$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ суть всевозможные различные простые числа. Ни одно из них не нуль. Рассмотрим число $N = p_0 \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} + 1 \neq 1$. Это число не делится ни на одно простое p_i. С другой стороны, из свойств умножения следует, что каждое число, кроме 1, кратно какому-то простому (действительно, если число не простое и не 1, у него есть делитель, после деления на который получится число *меньшее* исходного (свойство монотонности умножения), но отличное от 1; далее по индукции). Противоречие. □

[5] Формально, в конструкции этого отображения используется (счетная) аксиома выбора. Действительно, нам требуется «функция выбора» $i \mapsto g_i$.

[6] С формальной точки зрения, $f(n)\colon [n] \to A$ и $f(n+1)\colon [n+1] \to A$. В отличие от $f(n+1)$, отображение $f(n)$ не содержит никакой пары вида (n, b).

Задача 17.2. Докажите, что множество конечных подмножеств рациональных чисел счетно.

Решение. Нетрудно заметить, что есть простая инъекция из множества $\mathcal{P}_f(\mathbb{Q})$ конечных подмножеств $\mathbb{Q}$ во множество конечных последовательностей $\mathbb{Q}^*$. Действительно, каждое конечное подмножество упорядочим по возрастанию (ср. задачу 9.5). Кроме того, множество $\mathbb{Q}^*$ счетно в силу теоремы 23. Таким образом, существует инъекция $\mathcal{P}_f(\mathbb{Q}) \to \mathbb{N}$, а значит, $\mathcal{P}_f(\mathbb{Q})$ конечно или счетно по следствию 10.

С другой стороны, множество $\mathcal{P}_f(\mathbb{Q})$ бесконечно в силу леммы 5: имеем инъекцию $n \mapsto \{n\}$ из $\mathbb{N}$ в $\mathcal{P}_f(\mathbb{Q})$. □

Задача 17.3. Пусть множество $A \neq \varnothing$ конечно, а множество B счетно. Докажите, что множество всюду определенных функций $f\colon A \to B$ счетно.

Решение. Пусть $[n] \sim A$ для некоторого положительного $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$$

(мы рассматриваем биекцию $k \mapsto a_k$). Всякому отображению $f\colon A \to B$ поставим в соответствие последовательность $(f(a_0), f(a_1), \ldots f(a_{n-1}))$. Мы утверждаем, что такое соответствие является биекцией из множества отображений $A \to B$ во множество B^n. Действительно, если последовательности $(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1}))$ и $(f'(a_0), \ldots, f'(a_{n-1}))$ равны, то значения функций f и f' совпадают на всех элементах A, т. е. эти функции равны. С другой стороны, для любой последовательности $\vec{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1}) \in B^n$ определим отображение $f\colon A \to B$ так:

$$f(a_k) = b_k$$

для всех $k \in [n]$. Очевидно, этому f будет соответствовать $\vec{b}$.

Итак, рассматриваемое множество равномощно B^n, причем $n > 0$. По следствию 20, множество B^n счетно. □

Задача 17.4. Функция называется периодической, если для некоторого целого положительного числа T и любого $x \in \mathbb{Z}$ выполняется $f(x+T) = f(x)$. Докажите, что множество всюду определенных периодических функций $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ счетно.

Решение. Рассмотрим множество P_T функций с фиксированным периодом T. Каждой функции $f \in P_T$ поставим в соответствие функцию $f \circ t\colon [T] \to \mathbb{Z}$, где $t\colon [T] \to \mathbb{Z}$ есть тривиальная инъекция. Покажем, что указанное соответствие между P_T и множеством отображений $[T] \to \mathbb{Z}$ биективно.

В самом деле, пусть $f \neq f'$. Тогда найдется $x \in \mathbb{Z}$, т. ч. $f(x) \neq f'(x)$. Поделим число x на T с остатком: $x = Tq + r$, где $r \in [T]$. Индукцией по $k \in \mathbb{N}$ легко показать, что для любого $y \in \mathbb{Z}$ верно $f(y) = f(y \pm Tk)$. Значит, $f(x) = f(x - Tq) = f(r)$. Аналогично, $f'(x) = f'(r)$. Значит, $f(r) \neq f'(r)$. Однако, $f(r) = f(t(r))$ и $f'(r) = f'(t(r))$, т. е. $f \circ t \neq f' \circ t$. Инъективность установлена. Рассмотрим теперь произвольное отображение $g\colon [T] \to \mathbb{Z}$. Очевидно, имеем $g = f \circ t$ для $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, т. ч.

$$f(x) = g(x \bmod T)$$

для всех $x \in \mathbb{Z}$, где выражение $x \bmod T$ означает остаток от деления x на T. Ясно, что функция f имеет период T.

Воспользовавшись задачей 17.3, видим, что множество P_T счетно. Множество всех периодических функций есть $\bigcup_{T \in \mathbb{N}_+} P_T$, счетное или конечное по теореме 21. С другой стороны, $P_1 \subseteq \bigcup_{T \in \mathbb{N}_+} P_T$, а множество P_1 (множество константных функций), как мы показали, счетно. В силу леммы 12, множество $\bigcup_{T \in \mathbb{N}_+} P_T$ также счетно. $\square$

Задача 17.5. Пусть A бесконечно, а B счетно. Верно ли, что множество $A \cup B$ равномощно множеству A?

Решение. Верно. Заметим, что $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Согласно следствию 11, множество $B \setminus A \subseteq B$ конечно или счетно. По следствию 8, в A есть счетное подмножество B'. Имеем

$$A \cup B = (A \setminus B') \cup B' \cup (B \setminus A),$$

причем множества в правой части попарно не пересекаются. В силу следствия 22, множество $C = B' \cup (B \setminus A)$ счетно. Поэтому существует биекция $f \colon C \to B'$. Учитывая $A \cup B = (A \setminus B') \cup C$, доопределим биекцию f до $g \colon A \cup B \to (A \setminus B') \cup B'$:

$$g(x) \quad = \quad \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in C; \\ x, & \text{если } x \in A \setminus B'. \end{cases}$$

Тривиальная проверка биективности g оставляется читателю. Остается заметить, что $(A \setminus B') \cup B' = A$, а значит, биекция g искомая. $\square$

Задача 17.6. Докажите, что если A конечно и $B \subseteq A$, то

a) B конечно;
b) $|B| \leqslant |A|$;
c) $|B| = |A| \;\Leftrightarrow\; B = A$;
d) $|B| < |A| \;\Leftrightarrow\; A \setminus B \neq \varnothing$.

Решение. **a)** Это следствие 13.

b) В силу $B \subseteq A$, существует (тривиальная) инъекция $f \colon B \to A$. Если при этом $|B| = m > n = |A|$, получаем противоречие с принципом Дирихле (следствие 3). (В самом деле, тогда есть инъекции $g \colon [m] \to B$ и $h \colon A \to [n]$, а значит, есть инъекция $h \circ f \circ g \colon [m] \to [n]$.)

c) Импликация слева направо тривиальна. Пусть $|B| = |A|$. Имеем $A = (A \setminus B) \cup B$. В силу теоремы 14, $|A| = |A \setminus B| + |B|$, откуда $|A \setminus B| = 0$, т. е. $A \setminus B \sim [0]$. Легко видеть, что тогда $A \setminus B = \varnothing$ (не может быть сюръекции из пустого множества в непустое), откуда $A = \varnothing \cup B = B$.

d) Аналогично предыдущему пункту имеем $A = (A \setminus B) \cup B$ и $|A| = |A \setminus B| + |B|$. По свойствам сложения, $|A| < |B| \;\Leftrightarrow\; |A \setminus B| > 0$. С другой стороны, раз множество $A \setminus B$ конечно, существует единственное $n \in \mathbb{N}$, т. ч. $A \setminus B \sim [n]$, причем $|A \setminus B| = n$. Если $n = 0$, то $A \setminus B \sim \varnothing$ и $A \setminus B = \varnothing$. Если же $n > 0$, то $A \setminus B \neq \varnothing$, ибо иначе $[0] \sim \varnothing \sim [n]$. Итак, $|A \setminus B| > 0 \;\Leftrightarrow\; A \setminus B \neq \varnothing$. $\square$

Задача 17.7. Напомним, что натуральные числа — это целые неотрицательные числа. Постройте явные биекции между

a) множеством двоичных слов и натуральными числами;

b) парами натуральных чисел и натуральными числами;

c) конечными последовательностями натуральных чисел и натуральными числами.

Решение. **a)** Пусть W есть множество всевозможных (конечных) двоичных слов, включая пустое слово ε. Рассмотрим отображение $f\colon W \to \mathbb{N}$, определенное условием

$$f(\sigma) = (\overline{1\sigma})_2 - 1,$$

где $(\overline{\sigma})_2$ обозначает число, двоичной записью которого является слово σ. Отображение f инъективно, поскольку инъективна двоичная запись: если $\sigma \neq \tau$, то числа $(\overline{1\sigma})_2$ и $(\overline{1\tau})_2$ тоже различны. Рассмотрим произвольное $n \in \mathbb{N}$. Число $n+1$ не меньше единицы, так что его двоичная запись имеет вид 1σ. Имеем тогда $f(\sigma) = (\overline{1\sigma})_2 - 1 = n + 1 - 1 = n$. Отсюда сюръективность.

b) См. доказательство леммы 18.

c) Вновь воспользуемся «основной теоремой арифметики». Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, т. ч.

$$f(a_1, \ldots, a_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{l}) = 2^l \cdot p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k} - 1,$$

где $a_k \neq 0$ и $p_1, p_2, p_3, \ldots$ суть все простые числа по возрастанию, начиная с трех. В частности, для пустой последовательности будем иметь $f() = 2^0 - 1 = 0$, а для последовательности из четырех нулей $f(0000) = 2^4 - 1 = 15$.

Биективность легко следует из «основной теоремы арифметики». Каждое целое положительное число можно представить в виде $2^l \cdot p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$, где $a_k \neq 0$, причем число k (возможно, равное нулю) и набор $(a_1, \ldots, a_k, l)$ определятся при этом однозначно. С другой стороны, такие наборы, очевидно, биективно соответствуют всевозможным конечным наборам. $\square$