Занятие 18

Задача 18.1. Пусть множества A и B равномощны. Докажите, что множества $A \times A$ и $B \times B$ также равномощны.

Решение. Пусть имеется биекция $f\colon A \to B$. Рассмотрим отображение $g\colon A \times A \to B \times B$, т. ч.

$$g(a_1, a_2) = (f(a_1), f(a_2))$$

для всех $a_1, a_2 \in A$. Отображение g инъективно. Действительно, если $g(a_1, a_2) = g(a_1', a_2')$, то $f(a_1) = f(a_1')$ и $f(a_2) = f(a_2')$, откуда, по инъективности f, $a_1 = a_1'$ и $a_2 = a_2'$, т. е. $(a_1, a_2) = (a_1', a_2')$. Проверим, что g сюръективно. Пусть $(b_1, b_2) \in B \times B$. В силу сюръективности f, найдутся $a_1, a_2 \in A$, т. ч. $f(a_1) = b_1$ и $f(a_2) = b_2$. Очевидно, $g(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$. Итак, g есть искомая биекция. □

Напомним, что символом B^A обозначается множество всех отображений $A \to B$.

Лемма 1. *Для любых множеств A, B, C верно:*

1. *если $A \sim B$, то $A \times C \sim B \times C$;*
2. *если $A \sim B$, то $A^C \sim B^C$;*
3. *если $A \sim B$, то $C^A \sim C^B$;*
4. *$A \times B \sim B \times A$;*
5. *$(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$;*
6. *$(A^B)^C \sim A^{B \times C}$.*

Доказательство. Аналогично задаче 18.1, все биекции легко указать непосредственно. Разберем два случая.

Пусть $A \overset{f}{\sim} B$. Построим g, т. ч. $C^B \overset{g}{\sim} C^A$. Каждой функции $\varphi\colon B \to C$ поставим в соответствие функцию $g(\varphi)\colon A \to C$ следующим образом: для всех $a \in A$ положим

$$(g(\varphi))(a) = \varphi(f(a)).$$

Проверим инъективность отображения g. Пусть $\varphi, \varphi' \in C^B$ и $\varphi \neq \varphi'$. Тогда найдется $b \in B$, т. ч. $\varphi(b) \neq \varphi'(b)$. В силу сюръективности f, имеем $b = f(a)$ для некоторого $a \in A$. Но тогда

$$(g(\varphi))(a) = \varphi(f(a)) = \varphi(b) \neq \varphi'(b) = \varphi'(f(a)) = (g(\varphi'))(a),$$

а значит, $g(\varphi) \neq g(\varphi')$. Проверим сюръективность. Пусть $\psi \in C^A$. Рассмотрим отображение $\varphi \in C^B$, т.ч.

$$\varphi(b) = \psi(f^{-1}(b)),$$

где $f^{-1}\colon B \to A$ есть биекция, обратная биекции f. Тогда для любого $a \in A$ имеем

$$(g(\varphi))(a) = \varphi(f(a)) = \psi(f^{-1}(f(a))) = \psi(a),$$

т. е. $g(\varphi) = \psi$.

Докажем теперь, что $(A^B)^C \sim A^{B\times C}$. Содержательно, здесь утверждается, что любую функцию двух аргументов можно задать, каждому значению второго аргумента поставив в соответствие некоторую функцию одного — первого — аргумента. Например, умножение двух натуральных чисел будет задано семейством функций «умножение на константу».

Итак, строим биекцию $f\colon A^{B\times C} \to (A^B)^C$. Если $\varphi\colon B \times C \to A$, для каждого $c \in C$ положим

$$(f(\varphi))(c) = \varphi_c,$$

где каждая функция $\varphi_c\colon B \to A$ задается следующим образом:

$$\varphi_c(b) = \varphi(b, c)$$

при всех $b \in B$. Проверим инъективность. Пусть $\varphi, \varphi' \in A^{B\times C}$ и $\varphi \neq \varphi'$. Тогда найдется пара $(b, c) \in B \times C$, т. ч. $\varphi(b, c) \neq \varphi'(b, c)$. Но тогда $\varphi_c(b) \neq \varphi'_c(b)$, а значит,

$$(f(\varphi))(c) = \varphi_c \neq \varphi'_c = (f(\varphi'))(c),$$

откуда $f(\varphi) \neq f(\varphi')$. Проверим сюръективность. Рассмотрим произвольную функцию $\psi\colon C \to A^B$ и положим

$$\varphi(b, c) = (\psi(c))(b)$$

для всех $(b, c) \in B \times C$. Для всех $b \in B$ имеем

$$\varphi_c(b) = \varphi(b, c) = (\psi(c))(b),$$

следовательно, $\varphi_c = \psi(c)$. Значит, для всех $c \in C$ верно

$$(f(\varphi))(c) = \varphi_c = \psi(c),$$

т. е. $f(\varphi) = \psi$. $\square$

Отметим, что из доказанной леммы сразу следует утверждение задачи 18.1. Действительно,

$$A \times A \sim B \times A \sim A \times B \sim B \times B.$$

Напомним, что символом 2^X обозначается[1] множество $[2]^X$, т. е. множество отображений $X \to \{0, 1\}$, а символом $\mathcal{P}(X)$ обозначается множество всех подмножеств

[1]Отметим, что при формальном построении натуральных чисел оказывается $2 = [2]$ и, вообще, каждое натуральное число понимается как множество уже построенных меньших.

множества X. В частности, $2^{\mathbb{N}}$ есть множество отображений $\mathbb{N} \to \{0,1\}$, т. е. (бесконечных) последовательностей нулей и единиц с натуральными индексами:

$$a_0 a_1 \dots a_n \dots,$$

где $a_i \in \{0,1\}$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Лемма 2 (см. Лекции)**.** *Для любого множества X верно $\mathcal{P}(X) \sim 2^X$.*

Доказательство. Каждому подмножеству $A \subseteq X$ ставится в соответствие его *характеристическая функция* $\chi_A \colon X \to \{0,1\}$, которая принимает значение 1 на всех элементах A и 0 на всех элементах $X \setminus A$. □

Теорема 3 (см. Лекции)**.** *Имеет место $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}}$.*

Если $X \sim 2^{\mathbb{N}}$, то говорят, что множество X *имеет мощность континуум*, или *континуально.*

Задача 18.2. Докажите, что при всех целых положительных k множество $\mathbb{R}^k$ равномощно $\mathbb{R}$.

Решение. Проведем индукцию по k. При $k = 1$ имеем $\mathbb{R}^1 \sim \mathbb{R}$. Допустим, утверждение верно для $k \leqslant 1$. Тогда

$$\mathbb{R}^{k+1} \sim \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

в силу предположения индукции и леммы 1. Покажем, что $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$. Вследствие теоремы 3, достаточно построить биекцию $f \colon 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$. Положим

$$f(a_0 a_1 \dots a_n \dots, b_0 b_1 \dots b_n \dots) = a_0 b_0 a_1 b_1 \dots a_n b_n \dots .$$

Иначе говоря, для любых $a, b \in 2^{\mathbb{N}}$ на четных местах последовательности $f(a, b)$ стоят члены a, а на нечетных — члены b. Инъективность f ясна: если последовательности совпадают, то их «четные» и «нечетные» подпоследовательности тоже соответственно совпадают. Сюръективность ясна не менее: в каждой последовательности можно выделить «четную» и «нечетную» подпоследовательности. □

Будем писать $A \leqslant^f B$ или, просто, $A \leqslant B$, если существует инъекция $f \colon A \to B$. Ясно, например, что $X \leqslant 2^X$ для любого множества X (рассмотрим инъекцию $x \mapsto \{x\}$). Также ясно, что из $A \sim B$ следует $A \leqslant B$ и $B \leqslant A$. Верны ли обратные утверждения?

Теорема 4 (теорема Кантора; см. Лекции)**.** *Для любого множества X имеем $2^X \nleqslant X$. В частности, множество $\mathbb{R}$ не является счетным.*

Теорема 5 (теорема Кантора-Бернштейна; др. д-во см. в Лекциях)**.** *Для любых множеств A и B, если $A \leqslant B$ и $B \leqslant A$, то $A \sim B$.*

Доказательство. Пусть есть инъекции $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$. Рассмотрим отображение $F\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, т. ч.

$$F(X) = g(B \setminus f(A \setminus X)),$$

для всех $X \subseteq A$. Это отображение обладает свойством *монотонности*: если $X \subseteq Y$, то $F(X) \subseteq F(Y)$.

В самом деле, пусть $X \subseteq Y$ и $a \in F(X) = g(B \setminus f(A \setminus X))$. Тогда найдется b, т. ч. $b \in B$, $b \notin f(A \setminus X)$ и $g(b) = a$.

Допустим, что $b \in f(A \setminus Y)$. Тогда есть $a' \in A \setminus Y$, т. ч. $f(a') = b$. Но, в силу $X \subseteq Y$, $a' \in A \setminus X$, откуда $b \in f(A \setminus X)$, что не так. Значит, $b \notin f(A \setminus Y)$. Получили $a \in g(B \setminus f(A \setminus X)) = F(Y)$.

Лемма (о неподвижной точке). *Для любого множества A и любого монотонного отображения $F\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ найдется $Z \subseteq A$, т. ч. $F(Z) = Z$.*

Напомним, что образ множества под действием инъекции всегда равномощен этому множеству (инъективность дана, а сюръективность есть, потому что мы заведомо рассматриваем только точки, имеющие прообразы).

По лемме о неподвижной точке, найдется $Z \subseteq A$, т. ч. $F(Z) = Z$. Поскольку f инъекция,

$$A \setminus Z \sim f(A \setminus Z).$$

Аналогично,

$$B \setminus f(A \setminus Z) \sim g(B \setminus f(A \setminus Z)) = F(Z) = Z.$$

Пусть имеются биекции $h_1\colon Z \to B \setminus f(A \setminus Z)$ и $h_2\colon A \setminus Z \to f(A \setminus Z)$. Определим отображение $h\colon A \to B$ следующим образом:

$$h(a) = \begin{cases} h_1(a), & \text{если } a \in Z; \\ h_2(a), & \text{если } a \in A \setminus Z. \end{cases}$$

Ясно, что $A \overset{h}{\sim} B$.

Доказательство леммы о неподвижной точке. Рассмотрим множество (быть может, пустое) всех тех подмножеств $X \subseteq A$, что $X \subseteq F(X)$:

$$S = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq F(X)\}.$$

Положим $Z = \bigcup S = \bigcup_{X \in S} X$. По определению объединения, для всех $X \in S$ имеем $X \subseteq Z$, и далее, по монотонности, $F(X) \subseteq F(Z)$, откуда $X \subseteq F(Z)$. Значит, $Z = \bigcup_{X \in S} X \subseteq F(Z)$.

Из $Z \subseteq F(Z)$, в силу монотонности, получаем $F(Z) \subseteq F(F(Z))$, что означает $F(Z) \in S$. Но тогда $F(Z) \subseteq \bigcup_{X \in S} X = Z$.

Итак, имеем $Z \subseteq F(Z)$ и $F(Z) \subseteq Z$, откуда $F(Z) = Z$. $\square$

$\square$

Задача 18.3. Верно ли, что множество прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет мощность континуум?

Решение. Верно. Убедимся в этом с помощью теоремы Кантора-Бернштейна. Пусть L есть множество всех прямых. Для каждого $y \in \mathbb{R}$ обозначим l_y прямую, параллельную оси абсцисс и содержащую точку $(0, y)$. Ясно, что эти прямые попарно различны при разных y, а значит, отображение $y \mapsto l_y$ есть инъекция $\mathbb{R} \to L$. Итак, $\mathbb{R} \leqslant L$.

С другой стороны, каждая прямая l задается уравнением $Ax + By + C = 0$ для некоторых $A, B, C \in \mathbb{R}$. Т. е. мы имеем $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax + By + C = 0\}$. Ясно, что любая другая прямая l' задается каким-то иным набором $(A', B', C') \in \mathbb{R}^3$, т. к. иначе l и l' совпадали бы как множества точек. Итак, если каждой прямой l поставить в соответствие[2] некоторый задающий ее набор $(A_l, B_l, C_l) \in \mathbb{R}^3$, получится инъекция $L \to \mathbb{R}^3$. Имеем $L \leqslant \mathbb{R}^3$.

С учетом задачи 18.2, это дает $L \leqslant \mathbb{R}$, откуда $L \sim \mathbb{R}$ по теореме Кантора-Бернштейна. □

Задача 18.4. Докажите, что множество бесконечных последовательностей из 0 и 1 равномощно множеству бесконечных последовательностей, состоящих из **a)** 0, 1, 2, 3; **b)** 0, 1, 2; **c)** произвольных натуральных чисел.

Решение. **a)** В данном случае легко явно указать биекцию. Рассмотрим отображение $c\colon [4] \to \{0, 1\}^2$, т.ч.

$$\begin{array}{rcl} c(0) & = & 00 \\ c(1) & = & 01 \\ c(2) & = & 10 \\ c(3) & = & 11. \end{array}$$

Далее, последовательности $a_0 a_1 \ldots a_n \ldots$ из элементов множества $[4]$ поставим в соответствие двоичную последовательность

$$c(a_0)c(a_1)\ldots c(a_n)\ldots$$

Тривиальная проверка биективности такого соответствия оставляется читателю.

b) Здесь можно было бы действовать, как выше, но аналогичное отображение не будет сюръекцией, поскольку «кодирование» c не является теперь сюръективным. Однако, мы, по-прежнему, имеем инъекцию $[3]^{\mathbb{N}} \to [2]^{\mathbb{N}}$. С другой стороны, $[2]^{\mathbb{N}} \subseteq [3]^{\mathbb{N}}$ и, тем более (тривиальная инъекция), $[2]^{\mathbb{N}} \leqslant [3]^{\mathbb{N}}$. Теперь множества равномощны в силу теоремы Кантора-Бернштейна.

c) Вновь применим теорему Кантора-Бернштейна. Очевидно, $2^{\mathbb{N}} \leqslant \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Получим инъекцию $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$. Можно воспользоваться предыдущим пунктом, и закодировать

[2] Как видит вдумчивый читатель, аксиома выбора для существования такого отображения не требуется: потому, например, что мы можем сделать уравнение прямой единственным, зафиксировав $B = 1$ для всех прямых, не параллелельных оси ординат; а для оставшихся прямых (у них $B = 0$) можно положить $A = 1$.

последовательность натуральных чисел нулями, единицами и двойками так: представить каждый ее член в двоичной записи, используя 2 в качестве разделителя.

Можно, впрочем, явно обойтись и двумя цифрами. Именно, положим $u(k) = \underbrace{11\ldots1}_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда последовательности натуральных чисел $a_0a_1\ldots a_n\ldots$ поставим в (инъективное) соответствие последовательность

$$u(a_0)0u(a_1)0\ldots0u(a_n)0\ldots$$

$\square$

Лемма 6 (см. Лекции)**.** *Для вещественной прямой* $\mathbb{R}$ *верно* $(0,1) \sim (0,1] \sim [0,1]$.

Доказательство. Имеем $(0,1] = (0,1) \cup \{1\}$ и $[0,1] = (0,1] \cup \{0\}$. Как, по существу, показано в задаче 17.5, объединение бесконечного множества A с конечным или счетным B равномощно A. $\square$

Задача 18.5. Установите взаимно однозначное соответствие между кругом без границы и кругом с границей.

Решение. Напомним, что кругом без границы радиуса $r > 0$ с центром (a,b) называют множество

$$D_r(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}.$$

Круг с границей $\bar{D}_r(a,b)$ отличается тем, что неравенство будет нестрогим. Заметим, что параллельный перенос является биекцией плоскости $\mathbb{R}^2$, поэтому можно считать, что данные нам круги имеют общий центр $(0,0)$. Также ясно, что биекцией является гомотетия, так что можно считать наши круги D и $\bar{D}$ имеющими радиус 1.

Круг без границы D можно рассматривать как дизъюнктное (т. е. такое, чьи члены попарно не пересекаются) объединение точки $(0,0)$ и радиусов-интервалов I_φ, образующих с осью абсцисс всевозможные углы $\varphi \in [0,2\pi)$. Аналогично, круг с границей $\bar{D}$ без центра $(0,0)$ разбивается на радиусы-полуинтервалы S_φ.

Имеем $I_\varphi \sim (0,1)$ и $S_\varphi \sim (0,1]$ для всех $\varphi \in [0,2\pi)$, поскольку поворот (на угол φ) есть биекция. В силу леммы 6, получаем $I_\varphi \sim^{f_\varphi} S_\varphi$. Искомая биекция получается объединением биекций f_φ по всем $\varphi \in [0,2\pi)$, притом что точка $(0,0)$ оставляется ею на месте. $\square$

Пусть (a,b) интервал прямой $\mathbb{R}$. Назовем «квадратом» множество $(a,b) \times (a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b \text{ и } a < y < b\}$. Заметим, что в любом квадрате найдется рациональная точка (т. е. с обеими рациональным координатами). В самом деле, как известно из анализа, рациональное число есть в любом интервале прямой, а значит найдется $q \in (a,b) \cap \mathbb{Q}$. Тогда $(q,q) \in ((a,b) \times (a,b)) \cap \mathbb{Q}^2$.

Лемма 7 (см. Лекции)**.** *Выполнено* $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

Доказательство. Очевидно, $\mathbb{N} \leqslant \mathbb{Q}$. С другой стороны, каждое рациональное число q (единственным образом) представляется несократимой дробью $\frac{m}{n}$. Соответствие $q \mapsto (m, n)$ является инъекцией (если пары одинаковы, то и числа одинаковы) $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}^2$. Однако, как было показано на Лекциях (и на Занятии 17), $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$. По теореме Кантора-Бернштейна, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. □

Задача 18.6. Докажите, что множество попарно непересекающихся восьмерок на плоскости конечно или счетно. (Восьмерка — это объединение двух касающихся внешним образом окружностей ненулевого радиуса.)

Решение. В любой круг без границы включен некоторый квадрат, а значит, в круге всегда есть рациональная точка. Каждая из окружностей, образующих восьмерку, является границей круга, а значит, внутри ее имеется рациональная точка. Каждой восьмерке из данного нам множества X поставим в соответствие *пару* рациональных точек: одну внутри первой окружности, другую внутри второй.

Мы утверждаем, что такое соответствие есть инъекция из X в $\mathbb{Q}^2$. В самом деле, если какая-то другая восьмерка содержит те же точки внутри своих окружностей — одну точку внутри одной, вторую внутри другой — образующие ее окружности пересекают окружности первой восьмерки.

Поскольку $\mathbb{Q}^2 \sim \mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$, получили $X \leqslant \mathbb{N}$. Как было показано в Лекциях (и в Занятии 17), множество X конечно или счетно. □

Задача 18.7. Докажите, что множество бесконечных последовательностей действительных чисел равномощно $\mathbb{R}$.

Решение. Учитывая лемму 1 и теорему 3, имеем

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}.$$

□

Задача 18.8. Счетно ли множество бесконечных двоичных последовательностей $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$, в которых

a) каждый отрезок четной длины $b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+2k-1}$, где $k > 0$, содержит поровну нулей и единиц?

b) каждый отрезок нечетной длины $b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+2k}$, где $k > 0$, содержит почти поровну нулей и единиц (модуль разности равен 1)?

Решение. **a)** Рассмотрим всевозможные отрезки $b_i b_{i+1}$ длины 2. Раз единиц и нулей поровну, обязательно $b_i b_{i+1} = 01$ или $b_i b_{i+1} = 10$. Это означает, что в нашей последовательности после нуля всегда идет единица, а после единицы нуль. Легко видеть, что имеется ровно две последовательности с таким свойством: поскольку на местах одной четности стоят одинаковые символы, а на местах разной — разные, все зависит от первого символа.

b) Построим континуально много последовательностей с указанным свойством. Будем рассматривать последовательности нулей и единиц вида $\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$, где

$\alpha_k = 01$ или $\alpha_k = 10$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что такие последовательности биективно соответствуют элементам $2^{\mathbb{N}}$ (кодируем 0 словом 01 и 1 словом 10).

Покажем теперь, что каждая наша последовательность удовлетворяет условию задачи. Действительно, любой ее отрезок нечетной длины состоит из целого числа слов α_k и еще одного символа (перед этими блоками или после них, в зависимости от четности номера первой позиции нашего отрезка). Слова α_k содержат поровну нулей и единиц, а оставшийся символ дает вклад 1 в модуль разности их количеств.

Напомним, что согласно теореме Кантора, множество $2^{\mathbb{N}}$ несчетно, а всякое подмножество счетного множества конечно или счетно. Значит, не может быть, чтобы *всего* последовательностей со свойством из условия было счетно много. □

Задача 18.9. Существует ли континуальное семейство непересекающихся континуальных подмножеств $\mathbb{R}$?

Решение. Заметим, что во множестве $\mathbb{R}^2$ такое семейство есть: достаточно рассмотреть множество прямых $M = \{l_y \subseteq \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$, введенное в задаче 18.3. Как мы показали в задаче 18.2, существует биекция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Рассмотрим семейство

$$M_f = \{f(l_y) \subseteq \mathbb{R} \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Поскольку, в силу инъективности f, $l_y \sim f(l_y)$, элементы этого семейства континуальны. По той же причине они попарно не пересекаются при разных y (раз не пересекаются l_y). Тем более множества $f(l_y)$ попарно различны, а значит, соответствие $l_y \mapsto f(l_y)$ есть инъекция $M \to M_f$. Очевидно, что это соответствие сюръективно. Следовательно, $M_f \sim M \sim \mathbb{R}$. □

Задача 18.10. Верно ли, что множество функций $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ имеет мощность континуум?

Решение. Верно. Используя результат задачи 18.7, имеем

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}.$$

□

Задача 18.11. Докажите, что множество непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет мощность континуум.

Решение. Из анализа известно определение «по Гейне» непрерывности функции f на множестве $\mathbb{R}$: для каждой сходящейся при $n \to \infty$ последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится последовательность $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, причем $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$. Также известно, что к каждой точке множества $\mathbb{R}$ сходится некоторая последовательность рациональных чисел.

Пусть $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ есть тривиальная инъекция. Каждой непрерывной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ поставим в соответствие функцию $f \circ h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Покажем, что это соответствие инъективно. Пусть $f \neq f'$, т. е. $f(\alpha) \neq f'(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. Допустим, что $f \circ h = f' \circ h$. Возьмем какую-нибудь рациональную последовательность $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ со свойством $\lim_{n\to\infty} q_n = \alpha$. Имеем тогда

$$f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} (f \circ h)(q_n) = \lim_{n\to\infty} (f' \circ h)(q_n) = \lim_{n\to\infty} f'(q_n) = f'(\alpha),$$

что не так.

Итак, существует инъекция из множества непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ во множество $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{R}$ (см. задачу 18.10). С другой стороны, есть и инъекция из $\mathbb{R}$ во множество непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. В самом деле, каждому $\alpha \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие функцию $f_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, т. ч.

$$f_\alpha(x) = \alpha$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Очевидно, все f_α непрерывны. По теореме Кантора-Бернштейна получаем требуемую равномощность. $\square$