Занятие 21

Задача 21.1. Пусть U есть универсальная вычислимая функция. Докажите, что функция $V(x,y) \simeq U(y,x)$ не является универсальной.

Решение. Предположим противное: для любой вычислимой функции f из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ найдется $p \in \mathbb{N}$, т. ч. $f(y) \simeq V(p,y)$ для всех $y \in \mathbb{N}$. Нигде не определенная функция ξ, как мы уже отмечали, вычислима, поэтому найдется p, т.ч. $V(p,y) \simeq \xi(y)$, т. е. значение $V(p,y) \simeq U(y,p)$ не определено при всех $y \in \mathbb{N}$.

С другой стороны, рассмотрим какую-нибудь всюду определенную вычислимую функцию — скажем, константу 0. По универсальности U, для некоторого $q \in \mathbb{N}$ имеем $U(q,x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{N}$. В частности, $U(q,p) = 0$. Это противоречит тому, что значение $U(q,p)$ не определено. Следовательно, функция V не универсальная (в классе вычислимых функций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$). $\square$

Напомним, что универсальная вычислимая функция U называется *главной* (сокращенно — г. у. в. ф), если для любой вычислимой функции V из $\mathbb{N}^2$ в $\mathbb{N}$ найдется вычислимая всюду определенная функция $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч.

$$U(s(n),x) \simeq V(n,x)$$

при всех $x, n \in \mathbb{N}$.

Для любой функции V из $\mathbb{N}^2$ в $\mathbb{N}$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$ обозначим V_n функцию из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, определенную условием:

$$V_n(x) \simeq V(n,x)$$

для всех $x \in \mathbb{N}$. Функция V_n называется n-ым *сечением* функции V (по первому аргументу). Например, если $V(n,x) = nx$, то V_7 есть функция умножения на 7. Отметим, что если V вычислима, то и каждое ее сечение V_n вычислимо. Обратное, вообще говоря, неверно.

Обозначим символом $\mathcal{R}$ множество всех вычислимых функций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Теорема 1 (Успенского-Райса; см. разд. 15.9 Учебника)**.** *Пусть для множества функций $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$ выполнено $\mathcal{F} \neq \varnothing$ и $\mathcal{R} \setminus \mathcal{F} \neq \varnothing$. Тогда множество*

$$P_{\mathcal{F}} = \{n \in \mathbb{N} \mid U_n \in \mathcal{F}\}$$

неразрешимо.

Неформально, $P_{\mathcal{F}}$, называемое *индексным множеством* множества функций $\mathcal{F}$ (относительно у. в. ф U), можно рассматривать как множество всех тех и только тех программ, которые вычисляют функции из $\mathcal{F}$. В самом деле, U_n тогда означает функцию, вычисляемую программой n.

Отметим, что множество $P_{\mathcal{F}}$ «функционально замкнуто» в следующем смысле: если $n \in P_{\mathcal{F}}$ и $U_n = U_m$ (т. е. программы n и m вычисляют одну и ту же функцию), то $m \in P_{\mathcal{F}}$.

Задача 21.2. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что неразрешимо множество тех программ, которые вычисляют функцию $x \mapsto x^2$. Более формально, речь идет о множестве

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid U(n, x) = x^2 \text{ для всех } x \in \mathbb{N}\}.$$

Решение. Пусть функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ определена условием $f(x) = x^2$ для всех $x \in \mathbb{N}$. Очевидно, f вычислима. С другой стороны, имеем $P = \{n \in \mathbb{N} \mid U_n = f\}$, т. е. $P = P_{\{f\}}$. Множество $\{f\}$, разумеется, не пусто. Не пусто и его дополнение, поскольку существует вычислимая функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, отличная от f (например, константа 0).

Следовательно, по теореме Успенского-Райса, множество P неразрешимо. $\square$

Задача 21.3. В задаче Д19.8 утверждается, что для любой универсальной функции перечислимо множество программ, которые останавливаются хотя бы на одном входе. Используя это утверждение и теорему Успенского-Райса, докажите, что для любой г. у. в. ф. U множество

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid U(n, x) \text{ не определено для любого } x \in \mathbb{N}\}$$

программ, задающих нигде не определенную функцию, неперечислимо.

Решение. Итак, $P = P_{\{\xi\}}$, где ξ нигде не определенная функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Очевидно, применима теорема Райса-Успенского, а значит, множество P неразрешимо. Рассмотрим его дополнение

$$\bar{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid U(n, x) \text{ определено для некоторого } x \in \mathbb{N}\}.$$

Не ссылаясь на задачу Д19.8, напомним доказательство перечислимости $\bar{P}$. Будем перечислять все тройки $(n, x, k) \in \mathbb{N}^3$. Для каждой тройки выполним k шагов алгоритма вычисления функции U на входе (n, x). Если этот алгоритм завершился за k или менее шагов, выпишем n. Перейдем к следующей тройке. Таким образом, мы перечислим множество $\bar{P}$.

Согласно теореме Поста (задача 19.8), если множества X и $\bar{X}$ перечислимы, то X разрешимо. Предположение перечислимости P влечет разрешимость P, что не так. Следовательно, P неперечислимо. $\square$

Теорема 2 (о неподвижной точке; см. разд. 15.8 Учебника)**.** *Пусть U есть г. у. в. ф. и функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислимая тотальная. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$, т. ч. для всех $x \in \mathbb{N}$ верно*

$$U(n, x) \simeq U(f(n), x).$$

Неформальный смысл теоремы в том, что каково бы ни было вычислимое всюду определенное преобразование программ f, какую-то программу n это преобразование превратит в «эквивалентную» — вычисляющую ту же функцию — программу $f(n)$. В самом деле, $U_n = U_{f(n)}$.

Задача 21.4. (Программа, печатающая свой текст.) Пусть U есть г. у. в. ф.

a) Докажите, что найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $U(n,x) = n$ для всех $x \in \mathbb{N}$.

b) Докажите, что таких n бесконечно много.

c) Докажите, что множество

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid U(n,x) = n \text{ для всех } x \in \mathbb{N}\}$$

неразрешимо. (Применима ли в данном случае теорема Успенского-Райса?)

Решение. **a)** Рассмотрим функцию $V\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, определенную условием $V(k,x) = k$ для всех $k, x \in \mathbb{N}$. Ясно, что V вычислима. Поскольку у. в. ф. U главная, найдется всюду определенная вычислимая функция $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч.

$$U(s(k),x) \simeq V(k,x)$$

при всех $k, x \in \mathbb{N}$. С другой стороны, к функции s применима теорема о неподвижной точке. Поэтому существует $n \in \mathbb{N}$, т. ч.

$$U(n,x) \simeq U(s(n),x)$$

при всех $x \in \mathbb{N}$. Подставляя $k = n$ в первое равенство, получаем

$$U(n,x) \simeq U(s(n),x) \simeq V(n,x) = n$$

при всех $x \in \mathbb{N}$. Имеем $U(n,x) = n$, что и требовалось.

b) Всякое конечное множество разрешимо, поэтому требуемое утверждение следует из утверждения следующего пункта.

c) Теорема Успенского-Райса к множеству A не применима, поскольку это множество не является функционально замкнутым. Действительно, пусть $n \in A$. Вычислимая функция U_n имеет бесконечно много индексов относительно U (непустое множество функций $\{U_n\}$ не совпадает с $\mathcal{R}$; по теореме Успенского-Райса, его индексное множество неразрешимо), в частности, найдется $m \neq n$, т. ч. $U_m = U_n$. Имеем $U(m,x) \simeq U(n,x) = n \neq m$ при всех $x \in \mathbb{N}$. Поэтому $m \notin A$.

Нам достаточно показать, что у функции s из первого пункта неразрешимое множество неподвижных точек. Предположив противное, мы можем изменить s так, что все «старые» неподвижные точки исчезнут, но «новая» функция s' останется вычислимой. Применяя к ней теорему о неподвижной точке, получим некоторую неподвижную точку функции s'. Она отлична от всех «старых» неподвижных точек, а значит, является и неподвижной точкой функции s. Противоречие.

Проведем это рассуждение более аккуратно. Допустим, что A разрешимо. Рассмотрим функцию $V\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, определенную условием

$$V(k,x) \quad = \quad \begin{cases} k+1, & \text{если } k \in A; \\ k, & \text{если } k \notin A \end{cases}$$

для всех $k, x \in \mathbb{N}$. Вследствие разрешимости A, функция V вычислима (действительно, $V(k,x) = k + \chi_A(k)$). Используя главность у. в. ф. U, находим вычислимую функцию $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч.

$$U(s(k), x) \simeq V(k, x)$$

для всех $k, x \in \mathbb{N}$. Применяя к s теорему о неподвижной точке, получаем $n \in \mathbb{N}$ т. ч.

$$U(n, x) \simeq U(s(n), x) \simeq V(n, x)$$

при всех $x \in \mathbb{N}$. Имеем, таким образом,

$$U(n,x) \quad = \quad \begin{cases} n+1, & \text{если } n \in A; \\ n, & \text{если } n \notin A. \end{cases}$$

для любого $x \in \mathbb{N}$. Если $n \in A$, то $U(n,x) = n+1$ в силу последнего равенства и $U(n,x) = n$ по определению множества A. Это невозможно; следовательно, $n \notin A$. Но тогда $U(n,x) = n$ при всех $x \in \mathbb{N}$, что означает $n \in A$. Противоречие. Остается заключить, что A неразрешимо. □

Задача 21.5. (Автоматическая композиция программ.)

a) Пусть U есть г. у. в. ф. Докажите, что существует такая всюду определенная вычислимая функция $C\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, что для любых $x, p, q \in \mathbb{N}$ выполняется

$$U(C(p,q), x) \simeq U(p, U(q, x))$$

(т. е. существует алгоритм, который строит программу, вычисляющую композицию двух функций, заданных программами).

b) Пусть V есть у. в. ф. и существует такая всюду определенная функция C, которая по номерам p и q вычислимых функций выдает номер их композиции (т. е. $V(C(p,q), x) \simeq V(p, V(q, x))$). Докажите, что V — главная.

Решение. **a)** Напомним, что существует вычислимая биекция $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. (Например, можно положить $\langle m, n \rangle = 2^m(2n+1) - 1$.) Очевидно, существуют «обратные» к ней всюду определенные функции $\pi^1, \pi^2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч.

$$\pi^1(\langle m, n \rangle) = m \quad \text{и} \quad \pi^2(\langle m, n \rangle) = n$$

для всех $m, n \in \mathbb{N}$. Функции π^1, π^2 являются вычислимыми. Действительно, имея вход k, будем перечислять всевозможные пары $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ и для каждой вычислять $\langle m, n \rangle$ за конечное число шагов. В силу биективности, существует единственная пара (m, n), для которой $\langle m, n \rangle = k$. Мы найдем ее за конечное число шагов. На выход подадим, соответственно, m или n.

Рассмотрим функцию V из $\mathbb{N}^2$ в $\mathbb{N}$, определенную условием

$$V(n, x) \simeq U(\pi^1(n), U(\pi^2(n), x))$$

для всех $n, x \in \mathbb{N}$. Как композиция вычислимых, функция V вычислима. По главности U, существует вычислимая тотальная функция $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч.

$$U(s(n), x) \simeq V(n, x)$$

при всех $n, x \in \mathbb{N}$. Положим $C(p,q) = s(\langle p, q\rangle)$ для всех $p, q \in \mathbb{N}$. Функция C вычислимая тотальная. Имеем также

$$U(C(p,q), x) \simeq U(s(\langle p,q\rangle), x) \simeq V(\langle p,q\rangle, x) \simeq \\ U(\pi^1(\langle p,q\rangle), U(\pi^2(\langle p,q\rangle), x)) \simeq U(p, U(q,x))$$

при всех $p, q \in \mathbb{N}$, что и требовалось.

b) Покажем, что, благодаря наличию C, вычислима функция $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, выдающая индексы сечений биекции $\langle\cdot,\cdot\rangle$ относительно V. Точнее, такая что

$$V(t(n), x) = \langle n, x\rangle$$

для всех $n, x \in \mathbb{N}$.

Будем считать, что $\langle n, x\rangle = 2^n(2x+1) - 1$. Функции $x \mapsto 2x+1$, $x \mapsto 2x+2$ и $x \mapsto x-1$ вычислимы (хотя последняя и не определена в точке 0). Рассмотрим индексы этих функций относительно V, т. е. числа $p, q, r \in \mathbb{N}$, т. ч.

$$V(p,x) = 2x+1, \quad V(q,x) = 2x+2 \quad \text{и} \quad V(r,x) \simeq x-1$$

при всех $x \in \mathbb{N}$. Определим функцию t индуктивно условиями

$$\begin{array}{rcl} t(0) & = & C(r,p), \\ t(n+1) & = & C(r, C(q, t(n))) \end{array}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Эти условия указывают и алгоритм для вычисления $t(n)$: последовательно получаем $t(0), \dots, t(n-1), t(n)$. Индукцией по n покажем, что функция t нам подходит. Имеем

$$V(t(0), x) \simeq V(C(r,p), x) \simeq V(r, V(p,x)) = 2x+1-1 = 2^0(2x+1)-1 = \langle 0, x\rangle.$$

Далее, используя предположение индукции для n, получаем

$$V(t(n+1), x) \simeq V(C(r, C(q, t(n))), x) \simeq V(r, V(C(q, t(n)), x)) \simeq \\ V(C(q, t(n)), x) - 1 \simeq V(q, V(t(n), x)) - 1 \simeq 2V(t(n), x) + 2 - 1 = \\ 2\langle n, x\rangle + 1 = 2(2^n(2x+1)-1)+1 = 2^{n+1}(2x+1) - 1 = \langle n+1, x\rangle.$$

Установим теперь главность V. Пусть W произвольная вычислимая функция из $\mathbb{N}^2$ в $\mathbb{N}$. Найдется такое $w \in \mathbb{N}$, что

$$V(w, y) \simeq W(\pi^1(y), \pi^2(y))$$

при всех $y \in \mathbb{N}$, поскольку справа стоит вычислимая функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, а V есть у. в. ф. Положим $s(n) = C(w, t(n))$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, функция s вычислимая тотальная. Имеем

$$V(s(n), x) \simeq V(C(w, t(n)), x) \simeq V(w, V(t(n), x)) \simeq V(w, \langle n, x\rangle) \simeq \\ W(\pi^1(\langle n, x\rangle), \pi^2(\langle n, x\rangle)) \simeq W(n, x)$$

для всех $n, x \in \mathbb{N}$, что и требовалось. $\square$