# Занятие 3

Граф[1] $G = (V, E)$ представляет собой конечную непустую совокупность вершин $V$, некоторые из которых соединенны ребрами. Совокупность ребер обозначается $E$. Мы пишем $uv \in E$, если вершины $u$ и $v$ соединены ребром (говорим: вершины $u$ и $v$ *смежны*). Поскольку между любыми двумя вершинами есть не более чем одно ребро (т. е. нет кратных ребер), такая запись осмысленна. Отметим, что если $uv \in E$, то и $vu \in E$ (ребра не ориентированы). Кроме того, $uu \notin E$ для всех $u \in V$ (нет петель). Число вершин обозначают $|V|$ и число ребер $|E|$.

*Степенью* вершины $v$ называют число $\deg v$ ребер, имеющих в $v$ один из концов. Такие ребра взаимно-однозначно соответствуют вершинам, смежным с $v$ (т. е. своим концам, отличным от $v$), поэтому $\deg v$ есть также число вершин, смежных с $v$.

**Задача 3.1.** Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны $4, 4, 4, 4, 2$.

*Решение.* Предположим, такой граф существует. Тогда в нем найдутся три попарно различные вершины $u, v, w$, степень каждой из которых равна 4, и отличная от них вершина $z$ степени 2. Поскольку всего в графе 5 вершин, любая вершина степени 4 смежна со всеми другими. Следовательно, каждая из вершин $u, v, w$ смежна с $z$. Тогда степень вершины $z$ не меньше чем 3. Противоречие. $\square$

**Лемма 1** («о рукопожатиях»)**.** *Для любого графа $G = (V, E)$ верно*

$$\sum_{u \in V} \deg u = 2|E|.$$

*Доказательство.* Индукция по числу ребер в графе.[2] Для любого графа без ребер имеем

$$\sum_{u \in V} \deg u = 0 = 2|E|.$$

Предположим, что равенство верно для любого графа с $m$ ребрами. Рассмотрим произвольный граф $G$ со множеством вершин $V$ и с $m + 1$ ребром. Удалим в нем

[1] Приводимое далее терминологическое напоминание довольно нестрогое, но, мы надеемся, соответствует материалу и уровню строгости лекций.

[2] В графе может не быть ни одного ребра, так что удобно вести индукцию по целым неотрицательным числам: тогда мы проверяем «базис» для нуля.

какое-нибудь ребро $vw$. Получится граф $G'$ с теми же вершинами, но с $m$ ребрами, для которого, по предположению индукции, выполнено равенство

$$\sum_{u\in V} \deg_{G'} u = 2m.$$

Для графа $G$ имеем

$$\sum_{u\in V} \deg_G u = \sum_{\substack{u\in V\\ u\neq v,w}} \deg_{G'} u + (\deg_{G'} v + 1) + (\deg_{G'} w + 1) =$$

$$\sum_{u\in V} \deg_{G'} u + 2 = 2m + 2 = 2(m+1),$$

т. е. требуемое равенство также выполнено. □

Обозначаем $K_n$ *полный* граф на $n$ вершинах, в котором каждая вершина смежна с каждой отличной от нее. Обозначим $G \sqcup H$ граф, который получится, если мы возьмем непересекающиеся «копии» графов $G$ и $H$ и просто объединим их множества вершин и множества ребер. Такой граф всегда несвязен. Мы пишем $kG$ вместо $\underbrace{G \sqcup G \sqcup \ldots \sqcup G}_{k}$.

**Задача 3.2.** В графе 100 вершин и 800 ребер.

**a)** Докажите, что в этом графе есть хотя бы одна вершина степени не меньше 16.

**b)** Может ли так случиться, что все степени этого графа имеют степень 16?

*Решение.* **a)** От противного. Допустим, что все вершины рассматриваемого графа $(V, E)$ имеют степень не более 15. Тогда

$$\sum_{u\in V} \deg u \leqslant \sum_{u\in V} 15 = |V| \cdot 15 = 1500 < 1600 = 2|E|,$$

что противоречит лемме 1.

**b)** Может. Для доказательства, разумеется, не достаточно того, что такие параметры графа не противоречат лемме 1. Естественный способ доказать существование — привести пример требуемого объекта.

Пусть $V = \{0, 1, 2, \ldots, 99\}$. Расставим вершины-числа по окружности и соединим каждую с восемью ближайшими к ней по часовой стрелке и восемью ближайшими против часовой стрелки. Нетрудно понять, что каждая вершина имеет тогда ровно 16 смежных с нею: $i$-ая вершина от данной при обходе окружности в одном направлении будет $(100-i)$-ой в другую. Поэтому при $1 \leqslant i \leqslant 8$ выбранные нами вершины окажутся попарно различными.

Чтобы дать более формальное описание, напомним понятие сравнимости по модулю.

Пусть число $m$ натуральное, а числа $a$ и $b$ целые. Тогда $a \equiv b \pmod m$, если $a-b$ делится на $m$. В этом случае говорят «$a$ сравнимо с $b$ по модулю $m$».

Положим $uv \in E$ тогда и только тогда, когда $u-v = d \pmod m$ для какого-либо $d$ из множества $D = \{-1, 1, -2, 2, \dots, -7, 7, -8, 8\}$. Поскольку $0 \notin D$, имеем $uu \notin E$. Если $uv \in E$, то $u-v \equiv d \pmod{100}$, откуда $v-u \equiv -d \pmod{100}$, а значит, $vu \in E$. Таким образом, мы в самом деле задали некоторый граф.

Почему степень каждой его вершины $u$ равна 16? 16 способов выбрать число $d$ определяют 16 вершин $v$, смежных с $u$. Действительно, каждое $d$ определят ровно одно $v$, иначе $u-v \equiv d \pmod{100}$ и $u-v' \equiv d \pmod{100}$, откуда $v'-v \equiv 0 \pmod{100}$, но для $0 \leqslant v, v' \leqslant 99$ это возможно лишь при $v = v'$.

Однако, среди этих 16 вершин, в принципе, могут быть одинаковые (например, если бы мы положили $-50, 50 \in D$, числа $d = \pm 50$ задавали бы одного и того же соседа вершины $u$ в получающемся тогда графе)[3]. Допустим, что числа $d$ и $d'$ задают одно и то же $v$. Тогда $d - d' \equiv 0 \pmod{100}$. Но для наших значений $d$ и $d'$ так может быть только при $d = d'$. Итак, степень каждой вершины ровно 16.

По лемме 1, в построенном графе $\frac{16 \cdot 100}{2} = 800$ ребер, как и требуется.

Приведенный пример не единственный возможный. Например, подойдет несвязный граф $4K_{17} \sqcup G'$, где граф $G'$ имеет ровно 32 вершины, степенью 16 каждая. Граф $G'$ строится методом, указанным выше. $\square$

*Путем* в графе $G = (V, E)$ называется последовательность вершин $v_1 \dots v_k$, т. ч. $v_i v_{i+1} \in E$ для всех $i < k$. Число $k-1$ есть *длина* этого пути. В частности, путь длины 0 состоит из единственной вершины. Пути $v_1 \dots v_k$ и $v_k \dots v_1$ мы отождествляем, т. е. считаем за один. Путь $v_1 \dots v_k$ называется *простым*, если все вершины $v_1, \dots, v_k$ попарно различны.

*Граф-путь* $P_n$ состоит из $n$ попарно различных вершин $v_1, \dots, v_n$ и ребер $v_i v_{i+1}$ для всех $i < n$.

Вершины $u$ и $w$ *соединены путем* в графе $G$, если в $G$ найдется путь $v_1 \dots v_k$, т. ч. $u = v_1$ и $w = v_k$. Граф $G = (V, E)$ *связный*, если любые две его вершины соединены путем. *Компонентной связности* $[v]$ вершины $v \in V$ в графе $G$ называют подграф $G'$ графа $G$, состоящий из всех тех и только тех вершин, которые соединены с $v$ каким-либо путем в $G$, и всех ребер из $E$ с обеими концами в таких вершинах.

**Лемма 2.** *Если в графе $G$ вершины $u$ и $v$ соединены путем, то они соединены и некоторым простым путем.*

*Доказательство.* По принципу наименьшего числа,[4] найдется путь $w_1 \dots w_k$ наименьшей длины, соединяющий $u$ и $v$. Каждый такой пусть простой, иначе $w_i = w_j$

[3]Это наблюдение позволяет построить граф на ста вершинах, степени которых одинаковы и нечетны.

[4]Интуитивно очевидный *принцип наименьшего числа* гласит, что во всяком непустом множестве натуральных чисел найдется наименьший элемент. В данном случае мы рассматриваем множество чисел, которые являются длинами каких-либо путей в графе $G$, соединяющих вершины $u$ и $v$. Принцип наименьшего числа нетрудно вывести из принципа математической индукции, и обратно.

при каких-то $i < j$. Но тогда последовательность $w_1 \dots w_i w_{j+1} \dots w_k$ является более коротким путем, соединяющим $u$ и $v$. Противоречие. $\square$

**Задача 3.3.** Вершинами графа, который называется булев куб размерности $n$ и обозначается $B_n$, являются двоичные слова длины $n$, а соседями являются пары слов, отличающихся в одной позиции.

**a)** Сколько вершин в булевом кубе $B_n$?

**b)** Сколько ребер в булевом кубе $B_n$?

**c)** Сколько в булевом кубе $B_n$ подграфов, которые являются графами-путями длины 2 (вершин в таком графе 3)?

*Решение.* **a)** Вершинами графа $B_n$ являются двоичные слова длины $n$. Каждый из $n$ символов такого слова может быть выбран двумя способами. По правилу произведения, всего имеется $2^n$ слов.

**b)** Для каждой из $n$ позиций слово, отличное в этой позиции от данного слова $u$, смежно с $u$. Если $v$ отлично от $u$ ровно в $i$-ой, а $w$ — в $j$-ой позиции, причем $i \neq j$, то $v_j = u_j \neq w_j$, так что все эти $n$ слов попарно различны. Таким образом, $\deg u = n$. По лемме 1, $|E_{B_n}| = \frac{n2^n}{2} = n2^{n-1}$.

**c)** Каждый такой подграф имеет три попарно различные вершины $v, u, w$ и ребра $vu, uw$. Все подграфы разбиваются на попарно непересекающиеся подмножества в зависимости от того, какая вершина там «средняя» (т. е. общая для обоих ребер).

Для данной «средней» вершины $u$ подходящие подграфы взаимно однозначно соответствуют двуэлементным множествам $\{v, w\}$ своих «крайних» вершин, причем эти последние, конечно, смежны с $u$.

Среди $n$ вершин, смежных с $u$, две различные можно выбрать $\binom{n}{2}$ способами, т. е. имеется ровно $\binom{n}{2}$ подходящих подграфов со «средней» вершиной $u$. По правилу суммы, всего, для всевозможных вершин $u$, будет $\binom{n}{2}2^n$ таких подграфов. $\square$

**Задача 3.4.** Про граф известно, что в нем 1000 вершин и 2015 ребер. Верно ли, что

**a)** в таком графе обязательно есть путь длины 3000?

**b)** в таком графе может найтись простой путь длины 1000?

**c)** в таком графе может не оказаться ни одного простого пути длины 64?

*Решение.* **a)** По определению, путь в графе $G = (V, E)$ — это произвольная конечная последовательность вершин $v_1 v_2 \dots v_n$, т. ч. $v_i v_{i+1} \in E$ для всех $i < n$. При этом некоторые вершины $v_i$ могут совпадать. По условию, в нашем графе есть какое-то ребро $uv$. Рассмотрим путь

$$\underbrace{\underbrace{uv}\,\underbrace{uv} \dots \underbrace{uv}}_{1500} u.$$

В нем 3001 вершина, а значит длина его 3000.

**b)** По определению, простой путь — это путь, где все вершины попарно различны. Если в пути $n+1$ вершина, то длина его $n$. Предположив $n = 1000$, получаем $n + 1 = 1001$, однако в нашем графе не могут найтись 1001 попарно различные вершины. Следовательно, искомого простого пути нет.

**c)** Ответ положительный. В самом деле, будем строить несвязный граф так, чтобы ни в одной компоненте связности не было более 64 вершин. Тогда ни в одной из компонент не будет простого пути длины 64, а значит, не будет таких путей и в самом графе. Рассмотрим полный граф $K_{64}$. В нем ровно $\binom{64}{2} = 2016$ ребер (и нет ни одного *простого* пути длины 64). Выбросим любое ребро, получая граф $K'_{64}$. Далее рассмотрим $K'_{64} \sqcup (1000 - 64)K_1$. Графы $K_1$ (а значит, и их объединение) не содержат ни одного ребра. □

*Дополнением* $\bar{G}$ графа $G$ называется такой граф на том же множестве вершин, что и у графа $G$, в котором пара вершин смежна тогда и только тогда, когда в $G$ эта пара вершин не смежна.

**Лемма 3.** *Граф $G = (V, E)$ связен тогда и только тогда, когда существует вершина $u \in V$, соединенная путем в $G$ с любой вершиной $v \in V$.*

*Доказательство.* По определению, граф связен, если и только если любые две его вершины соединены путем. Поэтому, если $G$ связен, в качестве $u$ можно взять любую вершину. Обратно, пусть такая вершина $u$ существует. Покажем, что любые две вершины $v$ и $w$ соединены путем. По предположению, в $G$ есть пути $uv_1 \dots v_m v$ и $uw_1 \dots w_n w$. Тогда путь $vv_m \dots v_1 uw_1 \dots w_n w$ является искомым. □

**Задача 3.5.** Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно, оба связны).

*Решение.* Рассмотрим произвольный граф $G = (V, E)$. Если он связен, утверждение верно. Предположим, что $G$ не связен. Рассмотрим произвольные $u, w \in V$. Покажем, что эти вершины соединены путем в графе $\bar{G} = (V, \bar{E})$. Возможны ровно два случая.

В первом случае, $u$ и $w$ не соединены никаким путем в $G$. Тем более тогда $uw \notin E$, откуда $uw \in \bar{E}$, т. е. в $\bar{G}$ вершины $u$ и $w$ соединены путем $uw$.

Во втором случае, $u$ и $w$ соединены некоторым путем в $G$. Однако, раз $G$ не связен, по лемме 3, найдется вершина $v \in V$, с которой $u$ не соединена никаким путем в $G$. Легко видеть, что тогда и $w$ не соединена путем с $v$. Тем более $uv, wv \notin E$, откуда $uv, wv \in \bar{E}$. Значит, в графе $\bar{G}$ вершины $u$ и $w$ соединены путем $uvw$.

Как оказалось, если $G$ не связен, то в $\bar{G}$ любая пара вершин соединена путем длины не более двух. □

В графе $G$ путь $v_1 \dots v_k v_1$ называется *циклом длины $k$*. Тогда для любого $i < k$ последовательность $v_{i+1} v_{i+2} \dots v_k v_1 \dots v_i v_{i+1}$ также является циклом. В принципе, каждый такой цикл можно было бы отождествить с циклом $v_1 \dots v_k v_1$ — но, следуя Учебнику, мы *не станем* этого делать. Цикл называется *простым*, если все вершины $v_1, \dots, v_k$ попарно различны.

Очевидно, циклов длины один не существует, так как никакая вершина не смежна сама с собой. Цикл длины два $v_1 v_2 v_1$ существует, если и только если вершины $v_1$ и $v_2$ смежны. В частности, в таком цикле $v_1 \neq v_2$, т. е. он простой. Таким образом, каждому ребру $v_1 v_2$ соответствуют ровно два цикла: $v_1 v_2 v_1$ и $v_2 v_1 v_2$.

*Граф-цикл* $C_n$ состоит из $n \geqslant 2$ попарно различных вершин $v_1, \ldots, v_n$ и ребер $v_i v_{i+1}$ для всех $i < n$, а также $v_n v_1$.

Мы говорим, что ребро $uv$ *входит* (или, *содержится*) в путь $w_1 \ldots w_k$, если $u = w_i$ и $v = w_{i+1}$ или же $v = w_i$ и $u = w_{i+1}$ для некоторого $i < k$.

**Лемма 4.** *Если в связном графе удалить ребро, входящее в какой-либо простой цикл длины более двух, то получится связный граф. Если в связном графе удалить ребро, не входящее ни в какой простой цикл длины более двух, то получится граф с двумя компонентами связности.*

*Доказательство.* Пусть в связном графе $G$ удалили ребро $uv$, принадлежавшее простому циклу $zu_1 \ldots u_m uvv_1 \ldots v_n z$. Длина цикла больше двух, поэтому можно выбрать $z$ так, что $z \neq u, v$. Рассмотрим произвольные вершины $x$ и $y$. Если они были соединены каким-то путем, который можно считать простым по лемме 2, не содержащим ребро $uv$, то этот путь продолжает их соединять. Иначе вместо простого пути $xx_1 \ldots x_k uvy_1 \ldots y_l y$ рассмотрим путь

$$xx_1 \ldots x_k uu_m \ldots u_1 zv_n \ldots v_1 vy_1 \ldots y_l y,$$

очевидно, не содержащий ребра $uv$.

Допустим теперь, что удаленное ребро $uv$ не содержалось ни в одном простом цикле длины более двух. В новом графе $G'$ рассмотрим компоненты связности $[u]_{G'}$ и $[v]_{G'}$. Если вершина $w$ принадлежит той и другой компоненте, то она простым путем, не содержащим ребра $uv$, соединена с $u$ в графе $G'$, а значит, и в $G$. Аналогично, $w$ соединена в $G$ с $v$ простым путем, не содержащим $uv$. Выберем среди таких вершин $w$ ту $w'$, для которой сумма длин простых путей, ведущих в $u$ и в $v$ минимальна. Тогда, как легко проверить, эти пути $p_u$ и $p_v$ не имеют общих вершин, кроме $w'$.

Объединяя пути $p_u$ и $p_v$ с ребром $uv$, получаем простой цикл, содержащий последнее. Убедимся, что длина его не менее трех. В противном случае, $w' = u$ (или $w' = v$; это симметричный случай). Рассмотрим простой путь $p_v$ из $v$ в $w'$. Если его длина 0, то $u = w' = v$, что не так. Если его длина 1, то ребро $vw' = uv$, а в графе $G'$ такого ребра нет. Значит, длина этого пути хотя бы 2, т.е. в нем есть вершина $x$, отличная и от $v$ и от $w' = u$.

Получили невозможный по условию цикл. Значит, компоненты $[u]_{G'}$ и $[v]_{G'}$ не пересекаются и, тем более, не совпадают.

Покажем, что в $G'$ других компонент связности нет. В противном случае, некая вершина $w$ в графе $G$ не соединена ни с $u$, ни с $v$ никаким путем без ребра $uv$. В силу связности $G$, эта вершина соединена с $u$ и с $v$ только путями, содержащими ребро $uv$. По принципу наименьшего числа, среди всех этих путей (в $u$ или в $v$) можно выбрать путь наименьшей длины. Без ограничения общности, пусть это путь в $u$:

$$wx_1 \ldots x_n uvy_1 \ldots y_m u \text{ или } wx_1 \ldots x_n vuy_1 \ldots y_m u.$$

В каждом из случаев получаем более короткий путь из $w$ в $v$, что невозможно. Итак, в $G'$ ровно две компоненты. □

**Лемма 5.** *Если в графе с $k$ компонентами связности удалить ребро, входящее в какой-либо цикл, то получится граф с $k$ компонентами связности. Если в графе с $k$ компонентами связности удалить ребро, не входящее ни в какой цикл, то получится граф с $k+1$ компонентой связности.*

*Доказательство.* Применим лемму 4 к (единственной!) компоненте, содержащей удаляемое ребро. □

Граф называется $(n, m)$-*графом*, если он имеет ровно $n$ вершин и ровно $m$ ребер.

**Лемма 6.** *Для любого связного $(n, m)$-графа $G$ верно $m \geqslant n - 1$.*

*Доказательство.* Индукцией по числу ребер $m$ докажем следующее:

> для любого целого неотрицательного $m$ для всякого $n \in \mathbb{N}$ и любого связного $(n, m)$-графа верно $m \geqslant n - 1$.

Пусть $m = 0$. Если в $G$ есть две различные вершины, они не могут быть соединены путем, а значит, $n = 1$ и неравенство выполнено. Допустим, что при всех $m' \leqslant m$ и всех $n \in \mathbb{N}$ для всех связных $(n, m')$-графов верно $m' \geqslant n - 1$. Рассмотрим произвольный связный $(n, m+1)$-граф $G$ и удалим из него одно ребро. Согласно лемме 4, получится связный $(n, m)$-граф $H$, для которого, по предположению индукции, имеем $m \geqslant n - 1$, откуда $m + 1 \geqslant n - 1$, — или же получится $(n, m)$-граф $H$ с двумя компонентами связности: $(n', m')$-графом $G'$ и $(n'', m'')$-графом $G''$.

В последнем случае имеем $n' + n'' = n$ и $m' + m'' = m$. По предположению индукции, $m' \geqslant n' - 1$ и $m'' \geqslant n'' - 1$, откуда $m \geqslant n - 2$. Но тогда вновь $m + 1 \geqslant n - 1$. □

**Лемма 7.** *Для любых целых положительных чисел $p$ и $q$ верно:*

1. $\dbinom{p+q}{2} > \dbinom{p}{2} + \dbinom{q}{2}$;
2. *если $p \geqslant q$, то* $\dbinom{p+1}{2} + \dbinom{q-1}{2} > \dbinom{p}{2} + \dbinom{q}{2}$.

*Доказательство.* Первое неравенство легко доказать комбинаторно: левая часть его равна числу способов выбрать два разных шара из $p + q$ попарно различных шаров, среди которых $p$ черных и $q$ белых. В правой же части стоит число способов выбрать из указанных шаров два черных или два белых. Все выборы «справа» суть и выборы «слева», но обратное неверно, поскольку «слева» мы можем еще выбрать два шара разных цветов.

Для второго неравенства воспользуемся тождеством Паскаля. Имеем

$$\binom{p+1}{2} = \binom{p}{2} + \binom{p}{1} = \binom{p}{2} + p$$

и

$$\binom{q}{2} = \binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{1} = \binom{q-1}{2} + q - 1.$$

Значит, требуемое неравенство равносильно верному $p > q - 1$. □

**Задача 3.6.** Какое максимальное число ребер может быть в несвязном графе с $n$ вершинами?

*Решение. Первое рассуждение.* Пусть $G$ есть несвязный $(n, m)$-граф. В силу задачи 3.5, $(n, m')$-граф $\bar{G}$ связен, а по лемме 6, $m' \geqslant n - 1$. Ясно, что $m + m' = \binom{n}{2}$, так как в совокупности $G$ и $\bar{G}$, не имея общих ребер, содержат все возможные ребра между $n$ вершинами. Поэтому

$$m \leqslant \binom{n}{2} - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{2}.$$

Максимальное значение $\binom{n-1}{2}$ достигается на графе $K_{n-1} \sqcup K_1$.

*Второе рассуждение.* В любом графе на $n$ вершинах не более $\binom{n}{2}$ ребер. Поэтому есть некий несвязный граф $G$ на $n$ вершинах (быть может, не единственный), число ребер в котором максимально. Назовем такие графы «максимальными».

Выясним, как устроен $G$. Он имеет $k > 1$ компонент связности. Если какая-либо компонента не есть полный граф, к ней можно добавить ребра без нарушения несвязности, а значит, тогда наш граф не максимальный. Следовательно, каждая компонента есть полный граф.

Допустим $k > 2$. Тогда рассмотрим компоненты $K_p$ и $K_q$. Заменим их на $K_{p+q}$. В силу леммы 7, это увеличит число ребер при сохранении несвязности и числа вершин. Значит, вследствие максимальности, $k = 2$.

Допустим $G = K_p \sqcup K_q$ для $p \geqslant q > 1$. Рассмотрим граф $G' = K_{p+1} \sqcup K_{q-1}$. По лемме 7, $\binom{p+1}{2} + \binom{q-1}{2} > \binom{p}{2} + \binom{q}{2}$. Значит, в несвязном $G'$ больше ребер, чем в $G$, при том же числе вершин. Так не может быть в силу максимальности, а значит, $q = 1$. Но тогда $p = n - 1$. Итак, максимальный граф есть $K_{n-1} \sqcup K_1$, в каковом $\binom{n-1}{2}$ ребер. □

**Задача 3.7.** Вершины графа $G_n$ суть всевозможные двоичные слова длины $n$. Пара слов смежна, если выполняется одно из двух условий:

- слова различаются только в первой позиции;
- слова различаются только в позиции, которая следует за первой единицей.

(Например, в графе $G_4$ смежны вершины 0110 и 1110, а также 0100 и 0110.)

**a)** Какие степени у вершин этого графа? Укажите, сколько вершин каждой степени.

**b)** При каких $n$ граф $G_n$ связен?

*Решение.* **a)** Каждое слово $u$ смежно ровно с одним словом $v$, отличным от $u$ в первой позиции. Если в слове $u$ есть хотя бы одна единица и есть позиция, следующая за первой единицей, — т. е. первая единица не стоит в последней позиции — то с $u$ смежно еще и слово $w$, отличное от $u$ в позиции после первой единицы. Очевидно $u \neq w$, поскольку первая позиция никак не может следовать за первой единицей, а значит, $w_1 = u_1 \neq v_1$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ единственные слова без позиции за первой единицей будут $0 \dots 00$ и $0 \dots 01$. Степени этих двух слов 1. Степень всех остальных $2^n - 2$ слов есть 2.

**b)** Легко заметить, что слова смежны в $G_n$ тогда и только тогда, когда одно получается из другого за один шаг процесса, описанного в задаче 1.10. Мы показали, что для любого $n \in \mathbb{N}$ конечная последовательность шагов такого процесса позволяет из любого слова $u$ длины $n$ получить любое слово $v$ той же длины. Каждая такая последовательность задает путь из $u$ в $v$ в графе $G_n$. Поэтому граф $G_n$ связен для любого $n \in \mathbb{N}$. $\square$