Занятие 4

Деревом называется связный граф без простых циклов длины более двух.

Теорема 1 (Эквивалентные определения дерева)**.** *Для любого графа G, имеющего ровно n вершин и m ребер, следующие условия эквивалентны:*

1. *G дерево;*
2. *G связен и, если в G удалить любое ребро, получится граф ровно с двумя компонентами связности;*
3. *G связен и, если в G удалить любое ребро, получится несвязный граф;*
4. *G связен и $m = n - 1$;*
5. *любые две вершины графа G соединены единственным простым путем.*

Доказательство. Используем леммы 2, 4 и 6 Занятия 3. □

Задача 4.1. Дерево имеет 2015 вершин. Верно ли, что в нем найдется простой путь длины 3?

Решение. Рассмотрим граф $K_{1,n}$ (это «звезда» с n «лучами», т. е. граф с вершинами $0, 1, 2, \ldots, n$ и ребрами $01, 02, \ldots, 0n$) — очевидно, являющийся деревом — при $n = 2014$. Путь требуемого вида $uvwz$ содержит четыре попарно различные вершины. Покажем, что в $K_{1,n}$ такого пути не может быть. В самом деле, «среднее» ребро vw должно совпадать с каким-то ребром $0k$, где $k > 0$. Пусть $w = k$ и $v = 0$. Но тогда $z = 0 = v$, так как $\deg k = 1$. Случай $w = 0$ и $v = k$ симметричен. □

Задача 4.2. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 различные вершины имеют степень 5?

Решение. Предположим, что такое дерево T существует. Пусть u и v различные его вершины степени 5. В T имеется ровно 5 различных ребер с концом в u. Не более чем одно из них имеет конец в v, так что найдется еще хотя бы 4 различных ребра, отличных от рассмотренных, — с концом в v. Итак, в T не менее девяти различных ребер, но их ровно восемь по теореме 1. Противоречие показывает, что требуемого дерева не существует. □

Задача 4.3. Сколько циклов длины 2 может быть в дереве на 12 вершинах? Укажите все возможные ответы.

Решение. Каждое ребро uv входит ровно в два цикла длины 2 — именно, в uvu и vuv — причем разные ребра входят в разные циклы. В дереве на 12 вершинах 11 ребер, а стало быть, и $2 \cdot 11$ циклов требуемого вида. □

Задача 4.4. В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т. е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.

Решение. Допустим, что в данном дереве G всего n вершин (следовательно, $n - 1$ ребро) и $k \leqslant n$ вершин степени один. Обозначим вершины степеней, отличных от единицы, буквами $v_1, \ldots, v_{n-k}$ и вершины степени один — $v_{n-k+1}, \ldots, v_n$. В силу леммы о рукопожатиях имеем:

$$\sum_{i=1}^{n-k} \deg v_i + k = \sum_{i=1}^{n-k} \deg v_i + \sum_{i=n-k+1}^{n} \deg v_i = \sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2(n-1).$$

Степень каждой из вершин $v_1, \ldots, v_{n-k}$ по условию не менее трех, так что $\sum_{i=1}^{n-k} \deg v_i \geqslant 3(n-k)$, откуда

$$3(n-k) + k \leqslant 2(n-1).$$

Это неравенство эквивалентно $k \geqslant \frac{n}{2} + 1$. Тем более $k > \frac{n}{2}$, что и требовалось. □

Лемма 1. *Во всяком дереве более чем на одной вершине есть хотя бы две вершины степени один.*

Доказательство. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ суть все вершины дерева, причем $n > 1$. В силу связности, степени всех вершин положительны. По лемме о рукопожатиях, имеем $\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2(n-1)$. Если какие-то $n-1$ вершины (допустим, $v_1, \ldots, v_{n-1}$) имеет степень 2 и более, то $2(n-1) + \deg v_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2(n-1)$, откуда $\deg v_n = 0$, что не так. Значит, более чем $n-2$ вершин не могу иметь степень 2 и больше, а оставшиеся — не менее двух — имеют степень 1. □

Остóвным деревом графа G называется произвольный подграф этого графа, содержащий все вершины G, и являющийся деревом. (Эквивалентно: любое дерево на всех вершинах графа G, каждое ребро которого есть и в G). Заметим, что любое дерево является остовным для себя самого.

Лемма 2. *У всякого связного графа G есть остовное дерево.*

Доказательство. Пусть в связном графе G ровно n вершин. Рассуждаем индукцией по числу ребер. Пусть в графе $m \geqslant 0$ ребер. Если в графе G есть ребро, после удаления которого останется связный граф G', то G' содержит $m - 1$ ребро и, по предположению индукции, имеет остовное дерево, которое подходит и для G. Если же в графе G нет такого ребра (в частности, вообще нет ребер), то по удалении любого ребра остается несвязный граф[1], а значит, в силу теоремы 1, G есть дерево и собственное остовное дерево. □

Задача 4.5. Имеется связный граф. Докажите, что в нем можно выбрать одну из вершин так, чтобы после ее удаления вместе со всеми ведущими из нее ребрами останется связный граф.

Решение. Рассмотрим остовное дерево T данного графа G. Согласно лемме 1, в нем есть вершина u степени один. Если удалить ребро в T, идущее из u, то получится граф с двумя компонентами связности, одна из которых будет состоять точно из u. Если удалить еще и u, останется дерево T'. Если удалить вершину u из G вместе со всеми ведущими из нее в G ребрами, все остальные вершины будут принадлежать дереву T'.

Отметим особо, что утверждение задачи (если утверждать, не что некий связный граф «останется», а что (любой) оставшийся будет связен) верно и для графа K_1: поскольку мы не рассматриваем графов без вершин, *не существует ни одного* графа, который получался бы из K_1 описанной процедурой. А значит, любой такой граф связен. С другой стороны, если допустить граф без вершин, то его тоже естественно считать связным: любые две вершины в нем, конечно, соединены путем. □

Правильной раскраской (вершин) графа $G = (V, E)$ в $k \in \mathbb{N}$ цветов мы называем любое разбиение $(V_1, \ldots, V_k)$ множества $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ на k попарно непересекающихся подмножеств $V_1, \ldots, V_k$, так что из $uv \in E$ следует $v \in V_i$ и $u \in V_j$ для некоторых $i \neq j$. Иными словами, любое ребро соединят вершины из разных множеств, разного «цвета».

Задача 4.6. a) Докажите, что любое дерево 2-раскрашиваемо (существует правильная раскраска в 2 цвета).

b) Сколько есть правильных 2-раскрасок у дерева?

Решение. Первое рассуждение. Покажем, что для любого дерева T и любой его вершины v существует единственная правильная 2-раскраска с белой вершиной v и единственная — с черной. Очевидно, отсюда следует, что у всякого дерева ровно две правильные 2-раскраски.

Вершина v связана с каждой вершиной u дерева T единственным простым путем p_u. Если длина $|p_u|$ пути p_u четна, окрасим u в белый цвет, иначе — в черный. Пусть вершины u и w смежны. Если w не входит в путь p_u, то $p_w = p_u w$; в противном случае $|p_w| < |p_u|$, а значит, u не входит в p_w и $p_u = p_w u$. В каждом из случае числа $|p_u|$ и $|p_w|$ разной четности. Следовательно, вершины u и w разного цвета и

[1] В частности, если ребер нет вовсе, то *граф, получающийся удалением какого-либо ребра,* связен — и несвязен, имеет ровно 81 вершину и ровно 12 вершин и др. — потому что *таких графов нет.* По принятому соглашению, любое высказывание об элементе пустого множества считают верным. Это тесно связано с соглашением, что из ложной посылки следует что угодно. Например, верно, что «нынешний король Франции лыс» и что «нынешний король Франции волосат», поскольку каждое из этих высказываний понимают так: «любой человек, если он нынешний король Франции, то лыс (волосат)».

раскраска правильная. Еще одна правильная раскраска получится, если обратить цвет каждой вершины в уже построенной раскраске.

Покажем, что любая правильная 2-раскраска с белой вершиной v совпадает с построенной выше (аналогично, любая с черной вершиной v совпадает с ее обращением). Для этого достаточно проверить, что вершина u белая тогда и только тогда, когда длина $|p_u|$ четна. Ведем индукцию по этой длине. При $|p_u| = 0$ вершина $u = v$ белая. Пусть $|p_u| = k > 0$ и $p_u = v_1 \dots v_k u$. Имеем $|p_{v_k}| = k-1 < k$, так что, по предположению индукции, вершина v_k черная тогда и только тогда, когда число $k-1$ нечетно, т. е. k четно. С другой стороны, в силу правильности раскраски, вершина v_k черная тогда и только тогда, когда вершина u белая.

Второе рассуждение. Индукцией по числу ребер m установим следующее утверждение:

> для всех целых неотрицательных m, всех $n \in \mathbb{N}$ для любого (n, m)-дерева T существуют ровно две правильные 2-раскраски, причем одна получается из другой обращением цветов каждой вершины.

Если $m = 0$, то дерево T изоморфно K_1. Можно покрасить единственную вершину в черный цвет, а можно в белый. Утверждение очевидно. Пусть в T имеется $m > 0$ ребер. Удаляя произвольное ребро uv, получаем две компоненты связности T' и T'', очевидно, являющиеся деревьями с меньшим число ребер. Возьмем 2-раскраску T', т. ч. вершина u черная, и 2-раскраску T'', т. ч. вершина v белая (таковые найдутся по предположению индукции: если произвольная не подходит, обратим все цвета). Соединив u и v ребром, получим 2-раскраску дерева T. Вторую получим так же из «обратных» раскрасок деревьев T' и T''. Очевидно, полученные раскраски T взаимообратны.

Покажем, что у T нет других 2-раскрасок: каждая раскраска порождает раскраску T' и раскраску T'', такие что u и v раскрашены в разные цвета. Но все такие варианты мы уже рассмотрели. □

Задача 3.7. Докажите, что в дереве на $2n$ вершинах можно выбрать n вершин так, что ни одна пара выбранных вершин не соединена ребром (такие множества вершин называются *независимыми*).

Решение. Как мы видели, у любого дерева есть 2-раскраска. Допустив, что вершин каждого цвета меньше n, заключаем, что всего в дереве менее $2n$ вершин, что не так. Значит, вершин одного из двух цветов не менее чем n. Выберем любые n среди таковых. □

Задача 3.8. Граф получен из цикла на $2n$ вершинах добавлением ребер, соединяющих противоположные вершины.

a) При каких n этот граф 2-раскрашиваемый?

b) При каких n вершины этого графа можно правильно раскрасить в 3 цвета?

Решение. Если $n = 1$, то граф можно раскрасить в два и в три цвета (каждая 2-раскраска есть и 3-раскраска). Далее считаем, что $n > 1$. Как и задаче 3.2, мы можем описать наш граф G_n более формально: вершинами ему служат числа $0, 1, \ldots, 2n-1$, а смежны вершины u и v тогда и только тогда, когда $u - v \equiv \pm 1 \pmod{2n}$ (это условие дает цикл C_{2n}) или $u - v \equiv n \pmod{2n}$.[2] Заметим, кстати, что $-n \equiv n \pmod{2n}$.

a) Если граф G_n правильно раскрашен в два цвета, то вершины u и v, отличные на единицу, смежны и разного цвета (цвета чередуются в цикле C_{2n}). Поэтому все четные числа одного цвета, а нечетные — другого. Если n четно и $u-v \equiv n \pmod{2n}$, то $u - v$ четно, т. е. смежные вершины u и v имеют одну четность, а значит, и один цвет. Поэтому при четных n правильной 2-раскраски графа G_n нет.

Напротив, при нечетных n раскраска четных чисел в один, а нечетных в другой цвет оказывается правильной, так как любые «противоположные» вершины u и v, для которых $u - v \equiv n \pmod{2n}$, имеют разную четность.

b) Для всех нечетных n 2-раскраска является и 3-раскраской. С другой стороны, простой перебор показывает, что G_2 (т. е. K_4) раскрасить в 3 цвета нельзя. Можно понять, что при всех других четных значениях n искомая 3-раскраска существует и получается неким «локальным» изменением 2-раскраски (конкретно, мы раскрасим в третий, «красный» цвет ровно три вершины).

Итак, пусть вершина 0 будет белой (или черной); 1, $2n - 1$ и n будут красные; $n - 1$ будет черной и $n + 1$ будет белой. Оставшиеся $2(n - 2)$ вершины раскрасим, чередуя черный и белый цвета в цикле C_{2n}. Очевидно, сам цикл C_{2n} при этом раскрашен правильно. Убедимся, что ребра между «противоположными» вершинами не нарушают правильности. По построению, ребра $0n$, $1(n + 1)$ и $(2n - 1)(n - 1)$ правильные. Остаются ребра $2(n + 2), 3(n + 3), \ldots, k(n + k), \ldots, (n - 2)(2n - 2)$, где $2 \leqslant k \leqslant n - 2$. По построению, $n - 1$ и все нечетные среди вершин k, $2 \leqslant k \leqslant n - 2$, черные, а все четные — белые. Значит, поскольку n четно, все четные среди вершин $n + k$, $2 \leqslant k \leqslant n - 2$, должны быть черные, а все нечетные — белые. Это так и есть, поскольку мы чередуем цвета, начиная с белой нечетной $n + 1$.

Подводя итог, видим, что 3-раскраска графа G_n существует при всех натуральных $n \neq 2$. □

[2] Напомним, $a \equiv b \pmod{m}$ по определению означает, что $a - b$ делится на m.