Занятие 5

Ориентированный граф (или, *орграф*) $G = (V, A)$ состоит из некоторого непустого множества V вершин и множества A соединяющих эти вершины ориентированных ребер (или, *дуг* или, *стрелок*). Мы пишем $uv \in A$, если в орграфе G есть стрелка с началом u и концом v. Такая запись корректна, поскольку с данными началом и концом в орграфе допускается не более одной стрелки. Мы также, если не оговорено противное, предполагаем, что $uu \notin A$ для всех $u \in V$, т. е. в орграфе отсутствуют петли. Заметим, что в отличие от случая неориентированного графа, может быть $uv \in A$, хотя $vu \notin A$.

По-прежнему, *путем длины* $k-1$ в орграфе G мы называем любую последовательность $v_1 \dots v_k$ из $k > 0$ вершин G, для которой верно $v_i v_{i+1} \in A$ при всех $i < k$. Пути $v_1 \dots v_k$ и $v_k \dots v_1$, в отличие от случая неориентированного графа, мы отождествляем только в случае $k = 1$. Путь *простой*, если все его вершины попарно различны.

Циклом длины $k > 0$ в орграфе G называем любой путь $v_1 \dots v_k v_1$. Тогда для любого $i < k$ последовательность $v_{i+1} v_{i+2} \dots v_k v_1 \dots v_i v_{i+1}$ также является циклом. Как и ранее, мы считаем все такие циклы попарно различными. Цикл называется *простым*, если все вершины $v_1, \dots, v_k$ попарно различны.

Отметим, что пути v_1 и $v_1 v_1$ различны. Первый из них имеет длину 0 и существует для любой вершины v_1. Второй является циклом длины 1 (петлей). Без особых оговорок мы считаем, что таких циклов в орграфе нет.

Две вершины u и v орграфа G *сильно связ***а***ны* (или, *взаимодостижимы*), если в G есть путь из u в v и есть путь из v в u. Орграф G *сильно связ***н***ый*, если любые две его вершины сильно связаны.

Компонентой сильной связности $[v]$ вершины $v \in V$ в ориентированном графе G называют ориентированный подграф G' орграфа G, состоящий из всех тех и только тех вершин, которые сильно связаны с v в G, и всех стрелок из A с обеими концами в таких вершинах. На лекции было показано, что если две компоненты имеют общую вершину, то они совпадают.

Орграф G *слабо связный* (или, просто *связный*), если связен неориентированный граф $\hat{G}$, получающийся из G заменой каждой стрелки на неориентированное ребро и последующим удалением кратных ребер (из двух оставляется одно).

Задача 5.1. Вершины ориентированного графа — целые числа от 0 до 9. Ребро идет из вершины x в вершину y если $y - x = 3$ или $x - y = 5$. Найдите количество компонент сильной связности в этом графе.

Решение. Легко видеть, что последовательность

$$0\ 3\ 6\ 1\ 4\ 7\ 2\ 5\ 8\ 3\ 6\ 9\ 4\ 7\ 2\ 5\ 0$$

образует цикл в данном орграфе, содержащий каждую его вершину. Любой цикл $wx_1 \dots x_k uy_1 \dots y_l vz_1 \dots z_m w$ сильно связен, поскольку всякие две его вершины u и v взаимодостижимы: существуют пути $uy_1 \dots y_l v$ и $vz_1 \dots z_m wx_1 \dots x_k u$. Поэтому весь данный орграф сильно связен и, следовательно, имеет ровно одну компоненту. □

Задача 5.2. Найдите наибольшее целое положительное число, в котором все цифры разные, а любые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, делящееся на 7.

Решение. Чисел интересующего нас вида лишь конечно много, причем хотя бы одно есть (скажем, 14). Следовательно, существует наибольшее такое число. Каким оно должно быть? Представив задачу графом, мы можем ясным образом сократить возникающий перебор.

Образуем орграф $G = (V, A)$ с вершинами $0, 1, \dots, 9$, т. ч. $ab \in A$ тогда и только тогда, когда $a \neq b$ и последовательность ab есть двузначное число в десятичной записи, кратное семи (например, $70, 21 \in A$, но $77, 07, 34 \notin A$). Ясно, что каждая вершина G содержится ровно в одном из следующих путей:

$$7\ 0 \quad 3\ 5\ 6\ 3 \quad 1\ 4\ 2\ 8\ 4\ 9\ 1,$$

причем стрелки между вершинами из разных таких путей в G отсутствуют. (Отметим, что второй и третий из них являются циклами, а значит, компонентами сильной связности орграфа G. Первый путь разбивается на две компоненты сильной связности по одной вершине в каждой, поскольку из 0 нет пути в 7.)

Легко видеть, что подходящие числа взаимно-однозначно соответствуют простым путям в орграфе G. В частности, все цифры любого такого числа лежат в одном из указанных выше подмножеств вершин. Число вершин простого пути равно числу знаков соответствующего ему подходящего числа. Самые длинные простые пути в нашем графе содержат не более пяти вершин, и таковой, действительно, есть на вершинах из третьего множества. Значит, наибольшее подходящее число — пятизначное и составленное из цифр $9, 8, 4, 2, 1$. Напомним также, что цифры в подходящем числе не повторяются.

Самым большим числом с этими свойствами является $x = 98421$ (так цифры в нем идут по убыванию). С другой стороны, x соответствует простому пути $9\ 8\ 4\ 2\ 1$, а значит, x является подходящими и искомым. □

В орграфе $G = (V, A)$ *входящей степенью* вершины v называется число $d_-(v)$ ребер, ведущих в v. Поскольку кратные ребра не допускаются, $d_-(v)$ равно числу элементов множества $N_-(v)$ всех таких $u \in V$, что $uv \in A$. Аналогично, *исходящей степенью* вершины v называется число $d_+(v)$ ребер, ведущих из v. Очевидно, $d_+(v)$ равно числу элементов множества $N_+(v)$ всех таких $u \in V$, что $vu \in A$.

Лемма 1 (разд. 3.3.2 Учебника). *Для любого орграфа $G = (V, A)$ верно*

$$\sum_{v \in V} d_-(v) = |A| = \sum_{v \in V} d_+(v).$$

Доказательство. Индукция по числу стрелок $|A|$. □

Задача 5.3. 50 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Говорят, что команда a сильнее b, если a выиграла у b или есть команда c, такая что a выиграла у c, а c выиграла у b. Доказать, что команда, набравшая наибольшее число очков, сильнее любой другой.

Решение. Известно, что в волейболе не бывает ничьих, выигравшему матч добавляется одно очко, а число очков проигравшего не изменяется. Турнир в один круг означает, что любые две различные команды сыграли между собой ровно по одному разу.

Рассмотрим орграф $G = (V, A)$, где вершины суть команды-участники, и $xy \in A$ тогда и только тогда, когда команда x выиграла у команды y. Нетрудно видеть, что мы действительно определили орграф (т. е. нет петель и кратных ребер), причем по условию между любыми двумя разными вершинами проходит ровно одна стрелка (в ту или другую сторону). Число набранных командой x очков оказывается равным $d_+(x)$.

Пусть некая команда a набрала наибольшее число очков k (такая, заметим, непременно найдется, хотя может быть и не единственна). Рассмотрим произвольную команду $b \neq a$. Если $ab \in A$, то a сильнее b. В противном случае, $ba \in A$. Имеем $d_+(b) \leqslant k$. Следовательно, помимо a, команда b победила не более чем $k - 1$ команду. С другой стороны, команд, побежденных a (и значит, отличных и от a и от b), имеется ровно k. Все они не могли быть побеждены b, следовательно, для некоторой команды $c \neq a, b$ имеем $ac \in A$, но $bc \notin A$. Тогда $cb \in A$, а значит, a сильнее b. □

Задача 5.4. Известно, что в ориентированном графе на не менее чем двух вершинах из любой вершины в любую другую идет ровно один простой путь. Верно ли, что исходящие степени вершин в этом графе равны единице?

Решение. Рассмотрим орграф G с вершинами $0, 1, 2$ и ребрами $01, 10, 02, 20$. Для любого пути $0v_1 \dots v_k 1$ при $k > 0$ имеем $v_k = 0$, поскольку 01 есть единственное ребро с концом 1. Но тогда это не простой путь. Следовательно, единственный простой путь из 0 в 1 есть 01.

Для любого пути $1v_1 \dots v_k 2$ при $k > 1$ аналогичным образом имеем $v_k = 0$ и $v_1 = 0$. Следовательно, в простом пути из 1 в 2 обязательно $k = 1$, а единственный таковой есть путь 102. Симметричные пары вершин рассматриваются так же.

Итак, орграф G удовлетворяет условию задачи, однако в нем $d_+(0) = 2 \neq 1$. □

Орграф называется *ациклическим*, если в нем нет простых циклов длины более единицы. (Напомним, что петли — (простые) циклы длины один — мы обычно не допускаем ни в каких орграфах.)

Теорема 1 (разд. 3.3.5 Учебника)**.** *Орграф ациклический тогда и только тогда, когда его вершины можно пронумеровать натуральными числами таким образом, чтобы все стрелки вели «вверх»: из вершины с меньшим номером в вершину с большим.*

Задача 5.5. Найдите максимальное количество простых путей с заданными концами в ациклическом орграфе на n вершинах.

Решение. Прямое рассуждение. Рассмотрим произвольный ациклический орграф G на n вершинах и произвольную пару вершин u и v в нем. Если $n = 1$ или $u = v$, то из u в v идет ровно один простой путь u. Будем считать далее, что $n \geqslant 2$ и $u \neq v$.

Назовем все вершины G, кроме u и v, «средними»; всего средних вершин $n - 2$. Всякий простой путь из u в v имеет вид $ux_1 \dots x_k v$ (при $k = 0$, считаем, возникает путь uv), где $x_1, \dots, x_k$ суть k попарно различных средних вершин. Пути $ux_1 \dots x_k v$ поставим в соответствие множество $\{x_1, \dots, x_k\}$ его средних вершин.

Покажем, что если $ux_1 \dots x_k v$ простой путь в G, то при любой (не тождественной) перестановке вершин $x_1, \dots, x_k$ в этом пути полученная последовательность путем не будет. Нетрудно понять, что каждая перестановка для какого-то числа $i < k$ ставит x_{i+1} левее x_i.[1] Предположим, что $u \dots x_{i+1} x_{s_1} \dots x_{s_l} x_i \dots v$ для некоторого i тоже путь (очевидно, простой). Но тогда в орграфе G есть простой цикл $x_{i+1} x_{s_1} \dots x_{s_l} x_i x_{i+1}$ длиной более единицы. Противоречие с ацикличностью.

Итак, каждое подмножество $\{x_1, \dots, x_k\}$ множества средних вершин образует простой путь в орграфе G не более чем при одном упорядочении, т. е. разным путям соответствуют разные подмножества. Значит, простых путей из u в v имеется не более, чем подмножеств множества средних вершин. Таковых подмножеств, очевидно, 2^{n-2}.

Покажем, что эта оценка точна, т. е. найдутся ациклический орграф $G = (V, A)$ на n вершинах и пара вершин u и v в нем, т. ч. простых путей из u в v ровно 2^{n-2}. Пусть вершины G суть числа $0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$, а стрелки соединяют каждое число со всеми большими: $xy \in A$ тогда и только тогда, когда $x < y$. Легко видеть, что такой орграф G ациклический, поскольку цикл $x_1 \dots x_k x_1$ предполагает неравенства $x_1 < x_2, x_2 < x_3, \dots x_{k-1} < x_k, x_k < x_1$, из которых следует $x_1 < x_1$, что невозможно.

Возьмем $u = 0$ и $v = n - 1$. Любое из 2^{n-2} подмножеств множества средних вершин можно упорядочить по возрастанию и, присоединив к началу образованной последовательности u, а к концу v, получить путь искомого вида. Итак, каждое подмножество соответствует какому-то пути. В построенном орграфе интересующие нас пути и подмножества множества средних вершин находятся во взаимно-однозначном соответствии, так что тех и других ровно 2^{n-2}.

Применение теоремы 1. В любом ациклическом орграфе G на n вершинах вершины можно занумеровать числами $0, 1, \dots, n-1$ так, что любая стрелка идет от

[1] Пусть это не так. Тогда вершина x_1 стоит левее x_2, x_2 левее x_3 и т. д. вплоть до x_k. Значит, правее x_1 стоит $k - 1$ вершина и x_1 находится на первом месте. По индукции убеждаемся, что перестановка тождественная.

меньшего числа к большему. Отождествим вершины с их номерами. Теперь достроим наш орграф до орграфа G' так, что из *каждого* числа ведет стрелка в *каждое большее*. При этом, очевидно, любой простой путь, бывший в G, остался путем и в G'.

Если $u > v$, путей из u в v нет. Если $u = v$, то путь единствен. Пусть теперь $u < v$. Тогда любой простой путь $ux_1 \dots x_k v$ есть возрастающая последовательность $u < x_1 < \dots < x_k < v$; и обратно — каждая такая последовательность является простым путем. Путей из u в v в орграфе G', таким образом, столько же, сколько упорядоченных последовательностей чисел (включая пустую) строго между u и v. Чисел строго между u и v имеется ровно $v - u - 1$, а последовательностей, соответственно, будет $2^{v-u-1} \geqslant 1$ (для каждого числа два способа выбрать, войдет оно в последовательность или нет). Эта оценка достигает максимума 2^{n-2} при $u = 0$ и $v = n - 1$.

Итак, некоторые две вершины в орграфе G' соединяют ровно 2^{n-2} простых путей, причем в любом орграфе G простых путей между двумя вершинами не больше. Значит, 2^{n-2} есть искомое максимальное значение. □

Цикл в (ориентированном) графе называется *эйлеровым*, если он включает каждое (ориентированное) ребро графа ровно один раз. (Ориентированный) граф называется *эйлеровым*, если в нем есть эйлеров цикл.

Теорема 2 (разд. 3.4.2 Учебника)**.**

1. *граф без вершин степени нуль эйлеров тогда и только тогда, когда он связен и степень каждой вершины четна;*

2. *орграф, не содержащий вершины v, т. ч. $d_+(v) = 0 = d_-(v)$, эйлеров тогда и только тогда, когда он сильно связен и для каждой вершины v верно $d_+(v) = d_-(v)$.*

Лемма 2. *Пусть G орграф, не содержащий вершины v, т. ч. $d_+(v) = 0 = d_-(v)$, а G' получается из G добавлением петель к некоторым вершинам. Тогда орграф G эйлеров, если и только если G' эйлеров.*

Доказательство. Допустим, в G есть эйлеров цикл C. Поскольку C содержит каждое ребро, а каждая вершина является началом или концом какого-либо ребра, цикл C содержит и каждую вершину. Пусть к вершине v добавили петлю. Выберем ровно одно вхождение вершины v в цикл C и заменим это вхождение на путь vv. Так же поступим с другими петлями. Очевидно, полученный цикл эйлеров в орграфе G'.

Обратно. Пусть в G' есть эйлеров цикл C'. Каждая петля содержится в этом цикле ровно по одному разу. Заменим вхождение петли vv в цикле C' на вершину v. Так же поступим с другими петлями. Очевидно, получится эйлеров цикл в орграфе G без петель. □

Задача 5.6. а) Докажите, что есть такое двоичное слово, в котором любая комбинация из 10 нулей и единиц встречается ровно один раз.

b) Пусть двоичное слово удовлетворяет условию предыдущего пункта и начинается на 0100011101. Найдите последние 8 цифр этого слова.

Решение. **a)** Рассмотрим аналогичную задачу для комбинаций длины $n = 3$. Легко видеть, что слово

$$0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0$$

содержит каждую такую комбинацию ровно по одному разу. Комбинации, начинающиеся в соседних позициях, например, 010 и 101, обладают следующим свойством: «конец» длины $n-1=2$ первой комбинации — в нашем примере, 10 — совпадает с «началом» длины $n-1$ второй комбинации.

Можно попытаться соединить стрелками все комбинации с таким свойством. Получится орграф с петлями на 2^n вершинах. В нем искомые слова будет соответствовать обходам всех вершин ровно по одному разу. Однако такой обход не обойдет каждое *ребро* (их будет слишком много — 2^{n+1}, ибо исходящая степень каждой вершины 2), так что известные нам утверждения об эйлеровых циклах напрямую не помогут.

Поступим иначе. Рассмотрим орграф (с петлями), вершины которого будут всевозможные комбинации длины $n-1$, причем комбинации $\vec{a} = a_1 \dots a_{n-1}$ и $\vec{b} = b_1 \dots b_{n-1}$ соединены стрелкой тогда и только тогда, когда найдется комбинация длины n, чье начало есть $\vec{a}$, а конец есть $\vec{b}$. Но это имеет место тогда и только тогда, когда конец длины $n-2$ комбинации $\vec{a}$ совпадает с началом длины $n-2$ комбинации $\vec{b}$. Иначе говоря, мы строим орграф по тому же принципу, что и ранее, но только для комбинаций длины $n-1$.

Где в построенном орграфе G' имеются петли? Если есть стрелка $\vec{a}\vec{a}$, то найдется комбинация длины n, чьи начало и конец суть $\vec{a}$, т. е. $xa_1 \dots a_{n-1} = a_1 \dots a_{n-1}y$, откуда $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{n-2} = a_{n-1}$. Значит, $\vec{a} = 0\dots0$ или $\vec{a} = 1\dots1$. В этих вершинах действительно есть петли.

Исходящая степень каждой вершины, очевидно, равна 2, поскольку конец длины $n-2$ комбинации $\vec{a}$ можно ровно двумя способами продолжить до комбинации длины $n-1$ с таким началом. Аналогично, и входящая степень любой вершины равна 2. Если удалить петли, в получившемся орграфе G входящие степени, попрежнему, равны исходящим у всех вершин, причем вершин с нулевыми входящими или исходящими степенями в G тоже нет.

Установим, что орграф G' сильно связный. Достаточно показать, для любых двух его вершины $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует путь из $\vec{a}$ в $\vec{b}$. Имеем

$$a_1a_2\dots a_{n-1} \to a_2a_3\dots a_{n-1}b_1 \to a_3\dots a_{n-1}b_1b_2 \to \dots$$
$$\dots \to a_{n-1}b_1b_2\dots b_{n-2} \to b_1b_2\dots b_{n-2}b_{n-1}.$$

Если в каком либо пути встретилась петля $\vec{c}\vec{c}$, ее можно заменить вершиной $\vec{c}$, получая путь с теми же концами в орграфе G. Поэтому G тоже сильно связен.

Итак, мы можем заключить, что в орграфе G есть эйлеров цикл, а в силу леммы 2, эйлеров цикл есть и в орграфе G'.

Наличие ребра $\vec{a}\vec{b}$ означает, что существует комбинация длины n, чье начало есть $\vec{a}$, а конец есть $\vec{b}$. Ясно, что такая комбинация единственна: это в точности $a_1a_2\dots a_{n-1}b_{n-1} = a_1b_1\dots b_{n-2}b_{n-1}$, причем разными ребрами $\vec{a}\vec{b}$ соответствуют разные комбинации. Поэтому каждое из 2^n ребер графа G' можно отождествить с соответствующей комбинацией длины n.

Эйлеров цикл $\vec{a}_1\vec{a}_2\dots\vec{a}_{2^n}\vec{a}_1$ в графе G' единожды включает каждое ребро-комбинацию. Существует слово, такое что в его i-ой позиции начинается комбинация $\vec{a}_i\vec{a}_{i+1}$ для всех $i < k$, а в k-ой позиции начинается комбинация $\vec{a}_k\vec{a}_1$. Нетрудно видеть, что оно искомое. Отметим также, что длина полученного слова $2^n + (n-1)$.

b) Покажем, что любое подходящее слово соответствует некоторому эйлерову циклу в построенном орграфе. Пусть $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m$ некоторое такое слово. В каждой из первых $m-(n-1)$ его позиций начинается одна из комбинаций длины n, причем каждая из 2^n комбинаций встречается ровно однажды. Значит, $m = 2^n + (n-1)$.

Комбинация $\alpha_i\dots\alpha_{i+n-1}$ длины n имеет начало $\vec{a}_i = \alpha_i\dots\alpha_{i+n-2}$ и конец $\vec{a}_{i+1} = \alpha_{i+1}\dots\alpha_{i+n-1}$, соединенные стрелкой в орграфе G'.

Таким образом, наше слово соответствует пути $\vec{a}_1\vec{a}_2\dots\vec{a}_{2^n}\vec{a}_{2^n+1}$ в G', причем этом пути содержатся все 2^n ребер орграфа G' без повторений.

Покажем, что перед нами цикл, т. е. $\vec{a}_{2^n+1} = \vec{a}_1$. Допустим противное. В вершину $\vec{a}_1$ входят ровно два ребра, а значит, среди вершин $\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_{2^n}$ она встречается ровно дважды. Но тогда в нашем пути содержится ровно три ребра с началом $\vec{a}_1$, притом что в G' различных таких ребер два, т. е. некоторое ребро повторяется. Противоречие.

Теперь обратимся к условию: при $n = 10$ некоторое подходящее слово $\alpha_1\dots\alpha_{2^n+n-1}$ начинается с 010 001 110 1. В соответствующем эйлеровом цикле имеем $\vec{a}_1 = 010\,001\,110$. Конец длины n нашего слова образует комбинация $\alpha_{2^n}\alpha_{2^n+1}\dots\alpha_{2^n+n-1} = \alpha_{2^n}\vec{a}_{2^n+1} = \alpha_{2^n}\vec{a}_1$, поэтому последние $n-1 = 9$ его символов суть комбинация $\vec{a}_1$, а последние 8 — комбинация 10 001 110. □

Задача 5.7. Предположим, что последовательность чисел задана своим первым членом a_1 и соотношением $a_{n+1} = f(a_n)$, где f есть некоторая функция (определенная на всех числах).

a) Покажите, что либо все члены последовательности различны, либо она периодична: после некоторого начала (предпериода) числа начинают повторяться (период).

b) Покажите, что второй случай имеет место тогда и только тогда, когда $a_{2n} = a_n$ при некотором n.

Решение. **a)** Предположим, не все члены последовательности различны, т. е. найдутся два одинаковых: $a_N = a_{N+k}$ для некоторых $N, k \in \mathbb{N}$. Покажем, что k является длиной периода[2], а N длиной предпериода нашей последовательности.

[2]Периодов у последовательности может быть несколько: например, если есть период длины 2, то 3 таких периода образуют период длины 6. Обычно имеют в виду период наименьшей положительной длины (и саму эту длину называют периодом), но здесь это не оговорено.

В самом деле, при любом $n > N$ имеем $n = N + t$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$, откуда

$$a_n = a_{N+t} = \underbrace{f(\dots f(}_{t} a_N)\dots) = f^t(a_N) =$$

$$f^t(a_{N+k}) = a_{N+k+t} = a_{N+t+k} = a_{n+k}.$$

Можно также представить последовательность бесконечным путем в (бесконечном) орграфе (возможно, с петлями), вершинами которого являются все числа, а стрелки соединяют каждое число a с $f(a)$. В таком графе исходящая степень каждой вершины равна единице. Поэтому из любой вершины a_1 начинается единственный путь $a_1 a_2 \dots a_n \dots$, содержащий или не содержащий цикла. Первому случаю соответствует последовательность без повторов, а второму — периодическая. В самом деле, если мы пришли в некоторую вершину из нее самой, в силу единственности исходящего из вершины пути данной длины, мы непременно снова вернемся в эту вершину. Цикл образует период последовательности, а путь из a_1 в любую принадлежащую циклу вершину — предпериод.

b) Если $a_{2n} = a_n$, то, поскольку $n > 0$, мы явно имеем два одинаковых члена с разными номерами, а значит последовательность, как мы показали, периодична.

Обратно, пусть существуют $N, k \in \mathbb{N}$, т. ч. для всех $n > N$ верно $a_n = a_{n+k}$. Выберем число $l \in \mathbb{N}$ так, что $kl > N$. Тогда $a_{2kl} = a_{kl+kl} = a_{kl+k+\dots+k} = a_{kl}$. Достаточно, значит, взять $n = kl$. $\square$