Занятие 8

Напомним, что для произвольных множеств A и B существуют множества

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}; && \textit{(пересечение } A \textit{ и } B\textit{)}\\
A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}; && \textit{(объединение } A \textit{ и } B\textit{)}\\
A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\} && \textit{(разность } A \textit{ и } B\textit{)}.
\end{aligned}
$$

Кроме того, существует *пустое* множество $\varnothing$, такое что $x \notin \varnothing$ для всех x. Как производную от указанных мы определяли также операцию *симметрической разности* $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Мы говорим, что A есть *подмножество* (или, *включено в*) B и пишем $A \subseteq B$, если для любого x из $x \in A$ следует $x \in B$. Множества A и B *равны* (пишем $A = B$), если для любого x верно $x \in A$ тогда и только тогда, когда $x \in B$.

Лемма 1. *Для любых множеств A, B и C*

1. *$A \subseteq A$;*
2. *если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;*
3. *$A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.*

Лемма 2. *Любые два пустых множества равны, т. е. множество $\varnothing$ единственно.*

Доказательство. Пусть множества A и B пустые. Покажем, что $A = B$. Итак, покажем, что для всех x утверждение $x \in A$ верно тогда и только тогда, когда верно $x \in B$. Рассмотрим произвольный x. В силу пустоты наших множеств, оба утверждения $x \in A$ и $x \in B$ ложны, а значит, когда верно одно (никогда!), всякий раз верно и другое. □

Лемма 3. *Для любых множеств A и B верно $A \cap B \subseteq X \subseteq A \cup B$ при $X = A$ и при $X = B$. Также $A \setminus B \subseteq A$.*

Лемма 4. *Для любых множеств A и B равносильны утверждения:*

1. *$A \subseteq B$;*
2. *$A \cap B = A$;*
3. *$A \cup B = B$.*

Доказательство. Достаточно показать, что из первого утверждения следует второе, из второго третье, и из третьего — первое.

Пусть $A \subseteq B$. По лемме 3, имеем $A \cap B \subseteq A$. Покажем, что $A \subseteq A \cap B$. Предположим для произвольного x, что $x \in A$. Тогда $x \in B$ в силу $A \subseteq B$. Следовательно, $x \in A$ и $x \in B$, т. е. $x \in A \cap B$.

Пусть теперь $A \cap B = A$. По лемме 3, имеем $B \subseteq A \cup B$. Остается проверить $A \cup B \subseteq B$. Если $x \in A \cup B$, то $x \in A$ или $x \in B$. В первом случае, в силу $A = A \cap B$, верно $x \in A \cap B$, откуда $x \in B$. Тем более $x \in B$ во втором случае.

Пусть, наконец, $A \cup B = B$. В силу леммы 3, имеем $A \subseteq A \cup B$ и, по предположению, $A \cup B \subseteq B$, откуда $A \subseteq B$. □

Понятие объединения можно распространить на любое множество множеств $X = \{\ldots, A, B, C, \ldots\}$. Именно, существует множество

$$\cup X = \{x \mid x \in A \text{ для некоторого } A \in X\}.$$

В частности, $\cup\varnothing = \varnothing$. Аналогично, понятие пересечения можно распространить на любое *непустое* множество множеств:

$$\cap X = \{x \mid x \in A \text{ для всех } A \in X\}.$$

Очевидно, $\cup\{A, B\} = A \cup B$ и $\cap\{A, B\} = A \cap B$.

Если все рассматриваемые множества являются подмножествами какого-то выбранного U, называемого иногда *универсумом*, определена операция *дополнения.* Для всякого $A \subseteq U$ существует

$$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Очевидно, $\bar{A} = U \setminus A$.

Лемма 5. *Если $A, B \subseteq U$, то $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.*

Заметим, что об универсуме можно говорить весьма во многих случаях: например, если в задаче рассматриваются лишь какие-то множества A, B, C, можно положить $U = \cup\{A, B, C\} = (A \cup B) \cup C$.

Задача 8.1. Множество F состоит из графов, в которых ровно 4 ребра; множество T состоит из деревьев; а множество V состоит из графов, в которых 6 вершин. Выполняется ли равенство $(T \setminus F) \cap V = (T \cap V) \cap F$?

Решение. Множество $T \cap V$ состоит из (всех тех и только тех) деревьев, у которых 6 вершин. У любого такого дерева, как мы знаем, ровно 5 ребер. Значит, ни одно такое дерево не принадлежит множеству F. Поэтому $(T \cap V) \cap F = \varnothing$.

С другой стороны, множество $T \setminus F$ содержит дерево $K_{1,5}$ («звезда с пятью лучами»), которое имеет ровно 5 ребер и 6 вершин, а значит, принадлежит и множеству V. Итак, $K_{1,5} \in (T \setminus F) \cap V$, но $K_{1,5} \notin (T \cap V) \cap F$. Следовательно, исследуемое равенство не выполняется. □

Теорема 6 (основные тождества). *Для любых множеств A, B, C и любого включающего их универсума U верно:*

1. $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$;
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
3. $A \cap A = A$; $A \cup A = A$;
4. $\bar{\bar{A}} = A$;
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
6. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;
7. $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup \varnothing = A$; $A \cap U = A$; $A \cup U = U$; $\bar{\varnothing} = U$; $\bar{U} = \varnothing$;
8. $A \cap \bar{A} = \varnothing$; $A \cup \bar{A} = U$.

Доказательство. Проверка этих тождеств ведется по определению пересечения, объединения, дополнения, равенства, пустого множества и универсума. При этом важно, как мы понимаем использованные в определениях слова «и», «или», «неверно». По существу, тождества формализуют принятое в математике понимание этих слов.

Проверим $A \cap B = B \cap A$. Это равносильно $A \cap B \subseteq B \cap A$ и $B \cap A \subseteq A \cap B$. Докажем первое включение, т. е. что для любого x если верно $x \in A \cap B$, то верно $x \in B \cap A$. Рассмотрим произвольный x. Пусть $x \in A \cap B$. Тогда $x \in A$ и $x \in B$. Но, разумеется, тогда $x \in B$ и $x \in A$. Значит, $x \in B \cap A$. Раз это верно для произвольного x, то верно и для всех x.

Итак, $A \cap B \subseteq B \cap A$ для *любых* множеств $A, B \subseteq U$ для любого U. (И вообще для любых A и B, поскольку за U всегда можно взять $A \cup B$). Включение $B \cap A \subseteq A \cap B$ отличается от доказанного только именами *произвольных* множеств A и B. Так что специально рассматривать его не нужно: достаточно в первом включении взять за A «второе» B и за B — «второе» A.

Проверим $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Если $x \in \overline{A \cap B}$, то $x \in U$ и неверно, что $x \in A \cap B$. Т. е. неверно, что $x \in A$ и $x \in B$. В этом случае хотя бы одно из двух: неверно $x \in A$ или неверно $x \in B$. Соответственно получаем $x \in \bar{A}$ или $x \in \bar{B}$. Тогда $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

Итак, $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$. Аналогично устанавливается включение $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. □

Заметим, что приведенный набор тождеств полон в следующем смысле: если какое-то (конечное) равенство с операциям $\cap$, $\cup$, $^-$ и символами U и $\varnothing$ выполняется для любого U при любом выборе входящих в него множеств $A, B, C, \ldots \subseteq U$, то оно выводится из данных тождеств. С другой стороны, приведенный набор не минимальный полный: некоторые тождества можно исключить из него без потери полноты.

Задача 8.2. Докажите, что для любых множеств A, B, C выполняются равенства

a) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

b) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

d) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Решение. Нам достаточно установить эти равенства для произвольных множеств A, B и C. Выбрав таковые, мы положим $U = A \cup B \cup C$ и, тем самым, избавимся от разности множеств в пользу дополнения.

a) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap \overline{(A \setminus B)} = A \cap \overline{A \cap \bar{B}} = A \cap (\bar{A} \cup \bar{\bar{B}}) = A \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) = (A \cap B) \cup \varnothing = A \cap B$.

b) $B \cup (A \setminus B) = B \cup (A \cap \bar{B}) = (B \cup A) \cap (B \cup \bar{B}) = (B \cup A) \cap U = B \cup A = A \cup B$.

c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = ((A \cup B) \cap \bar{A}) \cup ((A \cup B) \cap \bar{B}) = (\bar{A} \cap (A \cup B)) \cup (\bar{B} \cap (A \cup B)) = ((\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B)) \cup ((\bar{B} \cap A) \cup (\bar{B} \cap B)) = ((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B})) \cup ((B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{A})) = ((A \cap \bar{B}) \cup \varnothing) \cup ((B \cap \bar{A}) \cup \varnothing) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

d) $(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap \bar{C} = \bar{C} \cap (A \cup B) = (\bar{C} \cap A) \cup (\bar{C} \cap B) = (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. □

Заметим также, что, по доказанному, $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Задача 8.3. Докажите включение

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \cup \ldots \cup (A_n \triangle B_n)$$

для любых множеств A_i, B_i.

Решение. Обозначим $A = A_1 \cap \ldots \cap A_n$ и $B = B_1 \cap \ldots \cap B_n$. В левой части включения имеем множество $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Пусть $x \in A \triangle B$. Если $x \in A \setminus B$, то найдется такое j, что $x \notin B_j$, но, с другой стороны, $x \in A_i$ для всех i. Поэтому $x \in A_j \setminus B_j \subseteq A_j \triangle B_j$. Случай $x \in B \setminus A$ рассматривается аналогично. □

Задача 8.4. Докажите равенство

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A_1 \setminus B_1) \cap (A_2 \setminus B_2) \cap \ldots \cap (A_n \setminus B_n).$$

для любых множеств A_i, B_i.

Решение. Ведем индукцию по n. Случай $n = 1$ очевиден. Для остальных используем утверждение:

$$(A \cap A') \setminus (B \cup B') = (A \setminus B) \cap (A' \setminus B'),$$

верное для произвольных множеств A, A', B, B'. Действительно, имеем

$$(A \cap A') \setminus (B \cup B') = (A \cap A') \cap \overline{(B \cup B')} = (A \cap A') \cap (\bar{B} \cap \bar{B}') = (A \cap \bar{B}) \cap (A' \cap \bar{B}') = (A \setminus B) \cap (A' \setminus B').$$

Используя индуктивное предположение для n, для $n+1$ получаем тогда

$$((A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cap A_{n+1}) \setminus ((B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) \cup B_{n+1}) = \\ ((A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)) \cap (A_{n+1} \setminus B_{n+1}) = \\ (A_1 \setminus B_1) \cap (A_2 \setminus B_2) \cap \ldots \cap (A_n \setminus B_n) \cap (A_{n+1} \setminus B_{n+1}).$$

□

Напомним, что такое *дизъюнктивная нормальная форма* (ДНФ). Мы рассматриваем «функциональные выражения», составленные из (символов) переменных $x_1, x_2, \ldots$ и (символов) булевых функций конъюнкции $\wedge$, дизъюнкции $\vee$ и отрицания $\bar{\ }$. Пример такого выражения: $\bar{x}_3 \vee ((x_2 \wedge x_{17} \wedge \bar{x}_1) \vee \overline{(x_6 \vee x_2)})$. Выражение вида x_i или $\bar{x}_i$ называется *литералом.* Выражение вида $l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_k$, где $k > 0$ и все l_i суть некоторые литералы, называется *элементарной конъюнкцией.* Выражение $c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m$, где $m > 0$ и все c_j суть некоторые элементарные конъюнкции, называется *дизъюнктивной нормальной формой.*

Например, $\bar{x}_7 \vee (x_5 \wedge \bar{x}_1) \vee (\bar{x}_3 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_2)$ есть ДНФ, а $(x_1 \vee x_2) \wedge \bar{x}_7$ не есть ДНФ.

Задача 8.5. Выразите в виде ДНФ булевы функции

a) $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge \ldots \wedge (x_1 \vee x_9)$;

b) $\bigwedge\limits_{1 \leqslant i < j < j \leqslant 5} (x_i \vee x_j \vee x_k) \wedge (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j \vee \bar{x}_k)$.

Решение. **a)** Воспользуемся свойством дистрибутивности дизъюнкции и конъюнкции:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge \ldots \wedge (x_1 \vee x_9) = \\ (x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)) \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge \ldots \wedge (x_1 \vee x_9) = \ldots = \\ x_1 \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge \ldots \wedge x_9).$$

b) Заметим, что данная функция пяти аргументов $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 0 на любом наборе, где есть хотя бы три единицы. В самом деле, если $x_i = x_j = x_k = 1$, то имеющийся в данном выражении конъюнкт $\bar{x}_i \vee \bar{x}_j \vee \bar{x}_k$ (или получающийся из этого изменением порядка переменных) принимает значение 0. Значит, и вся конъюнкция равна 0. Аналогично, функция принимает значение 0 на любом наборе значений аргументов с тремя нулями.

С другой стороны, в двоичном наборе длины пять непременно найдутся три единицы или три нуля. Следовательно, данная функция принимает значение 0 при любых значениях аргументов. Тогда подойдет ДНФ $x_1 \wedge \bar{x}_1$. □

Задача 8.6. Булева функция $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна тому значению, которое принимает большинство переменных (если мнения разделились поровну, $\mathrm{MAJ} = 0$). Докажите, что эту функцию можно представить в виде ДНФ, в которую не входят отрицания переменных.

Решение. Имеем

$$\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n \\ \frac{n}{2} < k \leqslant n}} (x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}).$$

Действительно, пусть $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Тогда $k > \frac{n}{2}$ аргументов принимают значение 1. Если упорядочить номера этих аргументов по возрастанию, окажется, что некоторая конъюнкция $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}$ принимает значение 1, а с нею и вся дизъюнкция.

Пусть дизъюнкция принимает значение 1. Тогда хотя бы одна из конъюнкций $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_k} = 1$, а значит, $x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_k} = 1$. Поскольку $k > \frac{n}{2}$, имеем $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$.

Итак, левая и правая части принимают значение 1 при одних и тех же значениях аргументов. Поскольку при оставшихся значениях обе части равны 0, их значения совпадают при всех значениях аргументов, что и требовалось.

Возможно, полезно явно указать ДНФ для случая $n = 3$. Имеем $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)$. □

Задача 8.7. Префикс слова $a_1 a_2 \ldots a_n$ — это любое слово вида $a_1 a_2 \ldots a_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Суффикс слова $a_1 a_2 \ldots a_n$ — это любое слово вида $a_k a_{k+1} \ldots a_n$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Подслово слова $a_1 a_2 \ldots a_n$ — это любое слово вида $a_j a_{j+1} \ldots a_k$, $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$. Найдите количество двоичных слов длины n, у которых:

a) множество суффиксов равно множеству префиксов;

b) множество суффиксов содержится в множестве префиксов;

c) множество суффиксов равно множеству подслов.

Решение. Обозначим $\mathrm{Sff}(\vec{a})$ множество суффиксов слова $\vec{a} = a_1 a_2 \ldots a_n$, $\mathrm{Prf}(\vec{a})$ множество его префиксов и $\mathrm{Sw}(\vec{a})$ множество подслов. Обозначим также W_n множество двоичных слов длины n.

a) Требуется найти число элементов множества $X = \{\vec{a} \in W_n \mid \mathrm{Sff}(\vec{a}) = \mathrm{Prf}(\vec{a})\}$. Как устроено это множество? Заметим, что для каждого натурального $k \leqslant n$ в слове $\vec{a}$ есть ровно один префикс длины k и ровно один суффикс длины k. Если $\vec{a} \in X$, то префикс $a_1 a_2 \ldots a_{n-2} a_{n-1}$ длины $n - 1$ является суффиксом, т. е. совпадает с суффиксом $a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n$ длины $n - 1$.

Это дает нам цепочку равенств $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-2} = a_{n-1} = a_n$, т. е. все символы слова $\vec{a}$ (попарно) одинаковы. Итак, если $\vec{a} \in X$, то $\vec{a} = \underbrace{00\ldots0}_{n}$ или $\vec{a} = \underbrace{11\ldots1}_{n}$. Обратно, любой суффикс слова $\underbrace{00\ldots0}_{n}$ является его префиксом, и наоборот. Тоже для справедливо для $\underbrace{11\ldots1}_{n}$. Получаем

$$X = \{\underbrace{00\ldots0}_{n}, \underbrace{11\ldots1}_{n}\},$$

откуда видно, что в X ровно 2 элемента.

b) Покажем, что рассматриваемое множество $Y = \{\vec{a} \in W_n \mid \mathrm{Sff}(\vec{a}) \subseteq \mathrm{Prf}(\vec{a})\}$ совпадает с X. Слова $00\ldots0$ и $11\ldots1$, очевидно, подходят, так что $X \subseteq Y$. Обратно, если $\vec{a} \in Y$, то суффикс $a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n$ является префиксом и, значит, совпадает с $a_1a_2\ldots a_{n-2}a_{n-1}$. Тогда получаем, что все символы слова $\vec{a}$ одинаковы, т. е. $\vec{a} \in X$. Итак, $Y \subseteq X$. Окончательно, $Y = X$.

c) Рассматриваем множество $Z = \{\vec{a} \in W_n \mid \mathrm{Sff}(\vec{a}) = \mathrm{Sw}(\vec{a})\}$. Очевидно, включение $\mathrm{Prf}(\vec{a}) \subseteq \mathrm{Sw}(\vec{a})$ выполнено для любого слова $\vec{a}$. Поэтому, если $\vec{a} \in Z$, то $\mathrm{Prf}(\vec{a}) \subseteq \mathrm{Sff}(\vec{a})$. Тогда префикс $a_1a_2\ldots a_{n-2}a_{n-1}$ является суффиксом, а, следовательно, совпадает с суффиксом $a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n$. Как и ранее, заключаем отсюда, что что все символы слова $\vec{a}$ одинаковы, т. е. $\vec{a} \in X$. Имеем $Z \subseteq X$. Включение $X \subseteq Z$ ясно.

$\square$