

Лекция 7

Функции

Понятие функции столь же важно для математики, как и понятие множества. Современные математики вообще предпочитают функции множествам и строят свои рассуждения соответственно. Однако в логике, теоретической информатике и родственных ей математических дисциплинах предпочитают рассуждать, опираясь на понятие множества. В этом случае функции выражаются через множества с помощью *графиков функций*.

В этой главе мы обсудим функции и связанные с ними понятия, а также способы их представления в терминах множеств.

Путеводитель по главе 7:

Раздел 7.1. Здесь мы разбираем пример, в котором возникают функции.

В разделе 7.2 функции и связанные с ними понятия (образ множества, полный прообраз множества) обсуждаются на содержательном уровне.

В разделе 7.3 объясняется как выразить функции через множества. Для этого используется понятие *графика функции*, которое мы будем в дальнейшем считать формальным определением функции. Для определения графика нам потребуется ещё одна операция с множествами: *декартово произведение*. Эта операция также определяется в данном разделе.

В разделе 7.4 вводятся важные частные случаи функций: инъекции, сюръекции и биекции. Там же обсуждаются стандартные биекции в комбинаторике.

В разделе 7.5 вводится важнейшая операция с функциями: *композиция* и обсуждаются её свойства. В этом же разделе даётся определение *обратной функции* и доказан простой, но очень важный, критерий обратной функции.

В разделе 7.6 мы возвращаемся к перечислительной комбинаторике и решаем задачи, связанные с подсчётом количества функций разных видов.

Раздел 7.7: задачи для самостоятельного решения.

7.1 Пример

Задача 7.1. Сколько есть k -элементных подмножеств в n -элементном множестве?

Мы уже обсуждали эту задачу в разделе 2.7 и даже привели два её решения. Сейчас мы повторим одно из них и выделим в нём использование понятия функции.

Мы начинаем с того, что подсчитываем количество *списков* подмножеств. Список отличается от подмножества тем, что его элементы упорядочены: известно, какой элемент подмножества первый, какой второй и т.д. Количество списков находится по правилу произведения и равно

$$(n)_k = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Далее мы находим количество списков, которые можно составить для одного подмножества. Оно равно $k!$, откуда получаем, что количество k -элементных подмножеств в n -элементном множестве равно

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Мы уже решили задачу, не используя слово «функция». И тем не менее, функции в этом решении присутствуют.

Как связаны списки и подмножества? Каждому списку отвечает ровно одно подмножество, это проиллюстрировано на рис. 7.1.

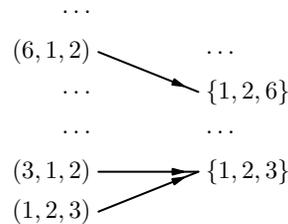


Рис. 7.1:

Вот это соответствие и есть функция. В решении используется свойство этой функции: каждому подмножеству соответствует одно и то же количество списков (а именно, $k!$). Поэтому и получается, что количество подмножеств ровно в $k!$ раз меньше, чем количество списков.

7.2 Функции и связанные с ними понятия

Из разобранный примера видно, что функция — это соответствие. Каждому элементу одного множества поставлен в соответствие какой-то элемент другого множества, причём ровно один.

7.2.1 Терминология и обозначения

Для некоторых функций области определения устроены очень сложно. Поэтому удобно расширить описание функции. *Функцией из множества A в множество B* мы назовём такое соответствие, которое сопоставляет некоторым элементам множества A какой-то элемент множества B . Область определения функции f из A в B состоит в точности из тех элементов x множества, которым сопоставлен элемент $f(x)$ множества B .

Наглядное представление функции¹ приведено на рис. 7.2.

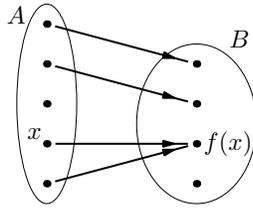


Рис. 7.2: функция

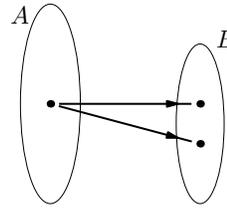


Рис. 7.3: не функция

Данному $x \in A$ (ещё говорят, *аргументу* функции) функция f из A в B либо не сопоставляет никакого элемента в B , либо сопоставляет ровно один такой элемент y . Во втором случае говорят, что x входит в *область определения* функции f , а этот самый единственный элемент y , сопоставленный элементу x , называют *значением функции f на x* и обозначают $f(x)$, как это сделано на рисунке 7.2. Элементы $f(x)$ для всех x из области определения функции f образуют *множество значений* функции f .

На рисунке, изображающем функцию из A в B , из каждого элемента множества A ведёт не более одной стрелки. Те точки слева, из которых выходит стрелка, образуют область определения. Те точки справа, куда входят стрелки, образуют область значений функции. На рисунке 7.3 показано, чего у функции не должно быть.

Пример 7.2. Функция «возведение в квадрат» определена для каждого целого x и ставит в соответствие этому x его квадрат (ещё говорят: отображает x в x^2). Множество значений этой функции имеет несколько названий, приведём два самых распространённых: «полные квадраты» и «квадратные числа».

Задача 7.3. Функция f из множества целых чисел в множество целых чисел сопоставляет числу x наименьшее простое число, которое больше x^2 . Какова область определения f ? Принадлежит ли число 19 множеству значений f ?

Решение. Простых чисел бесконечно много. Поэтому для каждого числа найдутся простые числа, которые больше этого числа. Причём в этом множестве простых чисел, как и в любом подмножестве множества натуральных чисел (т.е. целых неотри-

¹В лекции 8 мы сопоставим таким картинкам (двудольные) графы.

цательных), найдётся наименьшее число. Значит, областью определения f является всё множество целых чисел.

Функция «возведение в квадрат» обладает свойством строгой монотонности для неотрицательных чисел: если $0 \leq x < y$, то $x^2 < y^2$. Поэтому f нестрогая монотонная на натуральных числах: если $x < y$, то $f(x) \leq f(y)$.

Так как $f(4) = 17$, а $f(5) = 29$, то 19 не является значением функции f : если $f(x) = 19$, то $4 < x < 5$, а такого целого числа нет. \square

Задавать одну и ту же функцию можно различными способами. Всё, что требуется, — это указать правило, по которому из аргумента функции получается её значение. Такое правило может быть задано и словами, и формулами. Если функция имеет конечную область определения, её можно задать таблицей.

Исторически функции поначалу понимались именно как правила (формулы), по которым вычисляется значение функции. Но гораздо удобнее всё-таки различать способы задания функции и саму функцию.²

Тем не менее представление о функции как о способе вычисления значения функции очень живуче. Например, для программиста функция — это алгоритм, который получает на вход аргумент некоторого типа (скажем, целое число) и возвращает результат некоторого типа (может быть, другого). Скажем, функция «возведение в квадрат», которая определена выше, записывается так:

```
function square(x:integer): integer;
begin square:= x*x; end;
```

(Мы привели программу на паскале, потому что там используется как раз слово function,³ но аналогичные конструкции есть и в других языках программирования.)

Раньше (и до сих пор это осталось в «школьной математике») предполагалось, что аргумент функции — это число (пара чисел для функций двух переменных, тройка чисел для функции трёх переменных) и т. д., а функции с нечисловыми аргументами назывались *отображениями* или *преобразованиями*. Сейчас слова «функция», «отображение» и «преобразование» обычно употребляются как синонимы, хотя и неточные. Скажем, «линейные преобразования» не стоит называть «линейными функциями».

Если область определения функции совпадает с A , то пишут $f: A \rightarrow B$. Такие функции ещё называют *всюду определёнными*, а иногда *тотальными* (по-английски total) в отличие от общего случая *частичных* (или частично определённых, англ. partial) функций. Например, на рисунке 7.2 изображена частичная функция: легко увидеть на рисунке элемент, который не принадлежит области определения.

²Людей тоже можно задавать по-разному. Паспорт гражданина Иванова П. С. и фотография Пети Иванова в социальной сети — примеры разных способов идентифицировать одного и того же человека. Но было бы крайне неудобно называть человеком и паспорт, и фотографию в социальной сети, и личное дело в отделе кадров. Так же и с функциями.

³В этом примере математики и программисты ещё находят общий язык — но когда математик слышит, что «функция заикливается» или (хуже того) у нее есть «побочный эффект», из-за которого $f(x) + f(x)$ может быть не равно $2f(x)$, он невольно вздрагивает.

Вместе с обозначением $f: A \rightarrow B$ используется также и обозначение с «ограниченной стрелкой» $f: x \mapsto y$, которое указывает, что значение функции f на x равно y , т.е. это обозначение заменяет более привычное равенство $y = f(x)$.

7.2.2 Образ множества, полный прообраз

Функция устанавливает соответствие между элементами множеств. Это соответствие продолжается и на подмножества.

Пусть дана функция f из A в B . Тогда подмножеству $X \subseteq A$ эта функция сопоставляет образ $f(X) \subseteq B$ подмножества X . По определению $f(X)$ состоит в точности из тех элементов B , которые являются значениями элементов из A . Используя введённые в лекции 5 обозначения, это можно записать как

$$f(X) = \{b : b = f(x), x \in A\}.$$

Пример 7.4. Функции с конечной областью определения можно задавать *таблицами значений*. Ниже приведён пример такого задания функции

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	2	1	2	2	3	4	0	1	2	0	1	1

Что является образом множества $\{1, 2, 3\}$? Это по определению множество $\{1, 2\}$.

Задача 7.5. Верно ли для любых f, X, Y равенство $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$?

Решение. Ответ: да.

Условие $b \in f(X \cup Y)$ означает по определению, что $b = f(a)$, где $a \in X$ или $a \in Y$, то есть $b \in f(X) \cup f(Y)$. Значит, $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$.

С другой стороны, если $U \subseteq W$, то $f(U) \subseteq f(W)$ по определению. Значит, $f(X) \subseteq f(X \cup Y)$ и $f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$, то есть $f(X \cup Y) \supseteq f(X) \cup f(Y)$.

Из включений в обе стороны следует равенство $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$. \square

Задача 7.6. Верно ли для любых f, X, Y что из равенства $f(X) = f(Y)$ следует $X \cap Y \neq \emptyset$?

Решение. Ответ: нет. Рассмотрим функцию f из \mathbb{N} в \mathbb{N} , которая отображает все натуральные числа в 0. Для такой *постоянной* функции $f(X) = f(Y)$ для любых непустых X, Y . \square

Функция f из A в B устанавливает также соответствие и в другую сторону — между подмножествами множества B и подмножествами множества A . Подмножеству $X \subseteq B$ сопоставляется *полный прообраз* $f^{-1}(X) \subseteq A$ подмножества X . По определению $f^{-1}(X)$ состоит в точности из тех элементов A , значения которых лежат в X . Или формально

$$f^{-1}(X) = \{a : f(a) \in X\}.$$

Пример 7.7. Пусть таблица из примера 7.4 задаёт функцию из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ в множество $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Каков полный прообраз множества $\{0, 2, 4, 6\}$?

По определению в этот прообраз входят все числа из первой строки таблицы, под которыми стоят числа 0, 2, 4 или 6. Просмотрев таблицу, убеждаемся, что

$$f^{-1}(\{0, 2, 4, 6\}) = \{0, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}.$$

Задача 7.8. Функция f из \mathbb{N} в \mathbb{N} сопоставляет числу n наибольший простой делитель числа n . Найдите полный прообраз множества чётных чисел.

Решение. Среди простых чисел есть всего одно чётное число 2. Поэтому в множество значений f входит лишь одно чётное число 2. Значит, $f^{-1}(2\mathbb{N}) = f^{-1}(\{2\})$.

Если $f(n) = 2$, то по определению функции f у числа n все простые делители не превосходят наименьшего простого числа 2. Значит, число n является степенью двойки.

Ответ: $f^{-1}(2\mathbb{N}) = \{2^k : k > 0, k \in \mathbb{N}\}$. □

Обратите внимание, что функция f из предыдущей задачи частичная. Она не определена для $x = 1$ и $x = 0$, так как у 1 нет ни одного простого делителя, а 0 делится на все простые числа вообще и поэтому нет наибольшего простого делителя 0.

Задача 7.9. Верно ли для любых f, X, Y равенство $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$?

Решение. Ответ: да.

Условие $a \in f^{-1}(X \cap Y)$ означает по определению, что $f(a) \in X \cap Y$, то есть $f(a) \in X$ и $f(a) \in Y$. Поэтому $a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$. Значит, $f^{-1}(X \cap Y) \subseteq f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

В другую сторону, если $a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$, то по определению $f(a) \in X$ и $f(a) \in Y$. Значит, $f(a) \in X \cap Y$, то есть $a \in f^{-1}(X \cap Y)$. □

Задача 7.10. Верно ли для любых f, X, Y что из равенства $f^{-1}(X) = f^{-1}(Y)$ следует $X = Y$?

Решение. Нет, неверно. Опять рассмотрим постоянную функцию из \mathbb{N} в \mathbb{N} , которая принимает значение 0 на любом $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\{0, 1\}) = \mathbb{N}$. □

Задача 7.11. Функция f определена на множестве A и принимает значения в множестве B , при этом $X \subseteq B$. Какой знак включения или равенства можно поставить вместо $?$, чтобы утверждение « $f(f^{-1}(X)) ? X$ » стало верным?

Решение. Рассмотрим произвольный $b \in f(f^{-1}(X))$. По определению образа это означает, что есть некоторый $a \in f^{-1}(X)$, такой что $f(a) = b$. По определению прообраза включение $a \in f^{-1}(X)$, в свою очередь, означает, что $f(a) \in X$, а значит $b \in X$. Значит всякий элемент множества $f(f^{-1}(X))$ является элементом X , и мы доказали включение $f(f^{-1}(X)) \subseteq X$.

Обратное включение может не выполняться. Ещё раз рассмотрим постоянную функцию из \mathbb{N} в \mathbb{N} , которая принимает значение 0 на любом $n \in \mathbb{N}$. Пусть $X = \{0, 1\}$. Тогда $f^{-1}(X) = \mathbb{N}$ и $f(f^{-1}(X)) = \{0\} \subset X$.

Ответ: можно поставить \subseteq . □

7.3 Декартово произведение множеств и графики функций

Для функции f , аргументами и значениями которой являются действительные числа, можно определить её *график* — множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x, f(x))$. Рисунок графика даёт наглядное и удобное представление о функции.

При этом график однозначно задаёт функцию: если множество Γ точек координатной плоскости является графиком некоторой функции f из \mathbb{R} в \mathbb{R} , то значение $f(a)$ можно найти так: нужно рассмотреть пересечение Γ с прямой $x = a$. Если это пересечение пусто, то a не принадлежит области определения f . Если (a, b) — единственная точка, лежащая в этом пересечении, то $f(a) = b$. (См. рис. 7.4.)

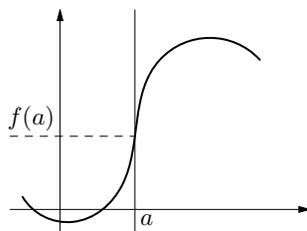


Рис. 7.4: Нахождение значения по функции по её графику

Контрольный вопрос 7.1. А что делать, если пересечение графика Γ с прямой $x = a$ содержит несколько точек?

Оказывается, такое же соответствие можно установить и в общем случае: функциям из множества A в множество B сопоставляются подмножества *декартова произведения* $A \times B$ множеств A и B , которые называются графиками функций.

Для начала нужно объяснить, что такое декартово произведение. Оно состоит из всех *упорядоченных пар* (a, b) , в которых $a \in A$, $b \in B$.

Пример 7.12. Пусть $A = \{a, m, d\}$, а $B = \{1, 2\}$. Тогда всего есть 6 упорядоченных пар в которых $a \in A$, $b \in B$ и по определению

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (d, 1), (d, 2), (m, 1), (m, 2)\}.$$

Упорядоченная пара (a, b) отличается от множества $\{a, b\}$, которое называется *неупорядоченной парой*, в двух отношениях. Во-первых, в упорядоченной паре различаются первый и второй элементы. Поэтому $(a, b) \neq (b, a)$ при $a \neq b$, а

$\{a, b\} = \{b, a\}$. Во-вторых, в паре всегда два элемента — один на первом месте, а второй на втором. Поэтому хотя $\{a, a\} = \{a\}$, неверно, что $(a, a) = a$.

Другими словами, мы считаем, что

$$(a, b) = (a', b'),$$

если и только если $a = a'$ и $b = b'$.

Формально, упорядоченные пары также можно определить через множества. Это уже относится к довольно тонким вопросам теории множеств и обсуждается в следующей задаче. При первом чтении эту задачу можно пропустить.

Задача 7.13. Польский математик Куратовский в первой половине XX века придумал, как определить формально упорядоченные пары: он предложил считать, что

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Проверьте (аккуратно разобрав случаи), что при таком определении равенство $(a, b) = (a', b')$ возможно, лишь если $a = a'$ и $b = b'$.

Эта задача иллюстрирует приёмы формального рассуждения с множествами. Лучше её решить самостоятельно. В любом случае читать решение имеет смысл только тогда, когда вы попытаетесь решить задачу.

Решение. Пусть $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$. Равенство множеств означает, что они содержат одни и те же элементы. Поскольку в множествах всего два элемента, есть ровно два способа отождествить их.

(I) $\{a\} = \{a'\}$, $\{a, b\} = \{a', b'\}$. Первое равенство означает, что $a = a'$. Тогда второе равенство приобретает вид $\{a, b\} = \{a, b'\}$. Поскольку b' обязан быть элементом левой части этого последнего равенства, возникают два подслучая:

(Ia) $a = b'$. Тогда $\{a, b\} = \{a\}$ и поэтому $b = a$. Значит, $a = a'$ и $b = a = b'$, что и требовалось доказать.

(Ib) $b = b'$. Что и требовалось доказать.

(II) $\{a\} = \{a', b'\}$, $\{a, b\} = \{a'\}$. Из первого равенства получаем $a' = a = b'$, из второго $a = a' = b$. Поэтому все четыре элемента совпадают, так что $a = a'$ и $b = a = b'$. Что и требовалось доказать. \square

Определение 7.1. *Графиком* функции f из A в B называется подмножество $\Gamma_f \subseteq A \times B$, состоящее из всех таких упорядоченных пар (a, b) , что $f(a) = b$.

Как видим, определение просто копирует определение графика числовой функции. Это объясняет одну часть термина «декартово произведение».

Слово «декартово» происходит от фамилии французского математика и философа Рене Декарта.⁴ Он придумал, что на плоскости можно ввести систему «декарто-

⁴Как философ он попал в «Маскарад» к Лермонтову: один из игроков, предвосхищая современных экономистов, говорит Арбенину: «Что ни толкуй Волтер или Декарт — // Мир для меня — колода карт, // Жизнь — банк; рок мечет, я играю, // И правила игры я к людям применяю.» Декарт-философ также известен латинским изречением Cogito ergo sum (мыслю, следовательно, существую).

вых координат», проведя две перпендикулярные ориентированные прямые, оси координат. После этого каждая точка плоскости задаётся упорядоченной парой чисел (x, y) , своих координат по оси абсцисс и оси ординат. Заметим, что пара именно упорядоченная: точки $(1, 2)$ и $(2, 1)$ — это разные точки. Можно сказать, что декартовы координаты устанавливают взаимно однозначное соответствие между плоскостью (ими снабжённой) и декартовым произведением $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ множества действительных чисел на себя.

Можно ещё объяснить, откуда берётся слово «произведение». В арифметике произведение чисел возникает как раз при подсчёте пар. Если множество A содержит m элементов, а множество B содержит n элементов, то с каждым из m элементов множества A можно составить n пар, спаривая его с каждым из n элементов множества B . Всего получается $m \times n$ элементов.

Укажем свойство, которое выделяет графики функций из остальных подмножеств декартова произведения.

Как мы помним, функция сопоставляет аргументу из области определения единственное значение. Поэтому в графике функции нет двух пар с одинаковой первой компонентой и разными вторыми.

Верно и обратное: если $\Gamma \subseteq A \times B$ таково, что в пересечении Γ и любого множества вида $\{(a, y) : y \in B\}$ лежит не более одного элемента, то Γ является графиком некоторой функции из A в B . Другими словами, для любых $x \in A$ и $y_1, y_2 \in B$ с $y_1 \neq y_2$ хотя бы одна из пар (x, y_1) и (x, y_2) не лежит в Γ . (Проверьте, что это то же самое.)

Доказательство легко получить, следуя рис. 7.4. Определим функцию f_Γ из A в B следующим правилом:

$$f_\Gamma(a) = \begin{cases} b, & \text{если } \Gamma \cap \{(a, y) : y \in B\} = \{(a, b)\}, \\ \text{не определена,} & \text{если } \Gamma \cap \{(a, y) : y \in B\} = \emptyset. \end{cases}$$

Как мы уже говорили выше, при формальном определении функций мы предпочитаем теоретико-множественный язык. Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять функции и их графики и пользоваться следующим формальным определением.

Определение 7.2. Функция из A в B — это такое подмножество F декартова произведения $A \times B$, что для любых $x \in A$ и $y_1, y_2 \in B$ с $y_1 \neq y_2$ хотя бы одна из пар (x, y_1) и (x, y_2) не лежит в F .

Этот буквоедский формализм может показаться избыточным. Его основные достоинства лежат в области оснований математики и их обсуждение выходит за рамки данной книги.

Заметим лишь, что данное формальное определение фиксирует понятие равенства функций. Функции равны тогда и только тогда, когда их графики равны как множества.

Задача 7.14. Равны ли функции из \mathbb{R} в \mathbb{R} , задаваемые формулами

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad \text{и} \quad x - 1?$$

Решение. Ответ: нет.

Точка $(-1, 0)$ принадлежит графику функции, задаваемой второй формулой, и не принадлежит графику функции, задаваемой первой формулой (значение которой не определено при $x = -1$). Значит, эти функции как подмножества $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ различны. То есть они различны по нашему определению. \square

Мы пока говорили лишь о функциях от одного аргумента. Как определить функции от нескольких аргументов? Определение через график функции легко обобщается на функции от нескольких аргументов: k -местной функцией из множеств A_1, A_2, \dots, A_k в множество B называется такое подмножество $F \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \times B$, что для любых $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ и $y_1, y_2 \in B$ с $y_1 \neq y_2$ хотя бы один из списков $(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1)$ и $(x_1, x_2, \dots, x_k, y_2)$ не лежит в F .

Мы использовали декартово произведение нескольких множеств, хотя и не определили его. Это определение аналогично определению декартова произведения двух множеств. Декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ — это множество, состоящее из всех списков длины k , в которых на i -м месте стоит элемент из множества A_i .

7.4 Инъекции, сюръекции и биекции

Довольно часто приходится рассуждать только про всюду определённые функции. В таком случае хочется говорить короче. Всюду определённую функцию $f: A \rightarrow B$ мы будем называть *отображением* множества A в множество B , когда нужно подчеркнуть, что функция всюду определена. То есть, когда речь идёт о функции, мы допускаем, что она не всюду определена; а вот отображение — частный случай понятия функции — считаем всюду определённым.⁵

Введём три важных частных случая отображений.

7.4.1 Определения

Отображение $f: A \rightarrow B$ называется *инъекцией*, если его значения в различных точках различны, то есть разным элементам из A ставятся в соответствие разные элементы B . Иначе говоря, f — инъекция, если $f(x_1) = f(x_2)$ влечёт $x_1 = x_2$. (Переформулировка: если $x_1 \neq x_2$ влечёт $f(x_1) \neq f(x_2)$ — тут мы ещё раз встречаемся с принципом контрапозиции.)

Пример инъекции изображён на рис. 7.5. Инъективность означает, что нет двух стрелок, ведущих из разных точек в одну, как на рис. 7.6.

⁵Такое разделение терминов не является общепринятым. Советуем читателю быть бдительным и проверять, о чём идёт речь, когда в математической книге встречаются слова «функция» и «отображение».

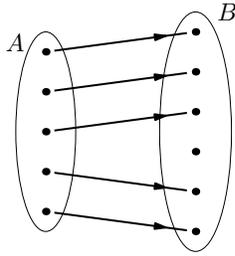


Рис. 7.5: инъекция

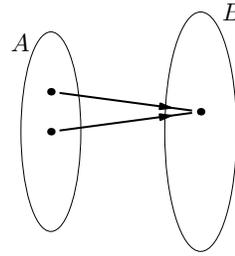


Рис. 7.6: не инъекция

Контрольный вопрос 7.2. Незадачливый студент перепутал определение инъекции и сказал: «если $f(x_1) \neq f(x_2)$, то $x_1 \neq x_2$ ». Что за свойство отображений он определил?

Отображение $f: A \rightarrow B$ называется *сюръекцией*, если его область значений совпадает со всем множеством B , то есть если для всякого элемента $y \in B$ найдётся элемент $x \in A$, для которого $f(x) = y$.

Пример сюръекции изображён на рис. 7.7. Нарушение сюръективности на рисунке изобразить сложнее: для сюръективной функции не должно быть точек справа, в которые не ведёт ни одной стрелки (как на рис. 7.8).

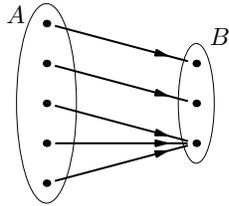


Рис. 7.7: сюръекция

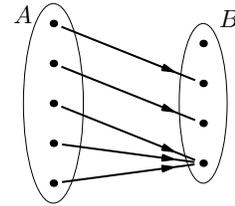


Рис. 7.8: не сюръекция

Пример 7.15. Отображение множества списков в множество подмножеств, которое мы рассмотрели в разделе 7.1, является сюръекцией (каждое конечное множество можно записать в виде списка его элементов).

Отображение $f: A \rightarrow B$ называется *биекцией*, если оно одновременно является и инъекцией, и сюръекцией. Другими словами, функция является биекцией, если всякому элементу из B соответствует ровно один элемент из A .

В изображении биекции из каждой точки слева выходит ровно одна стрелка, и в каждую точку справа ровно одна стрелка входит. То есть каждая точка с одной стороны соединена ровно с одной точкой с другой стороны. Поэтому биекции ещё называют *взаимно однозначными соответствиями*: соединённые вершины, то есть аргумент функции и её значение, *соответствуют* друг другу при этой биекции.

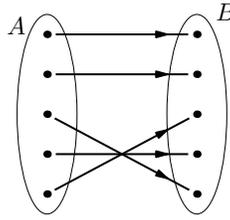


Рис. 7.9: биекция

Контрольный вопрос 7.3. Требование «ровно один» состоит из двух: не более одного и не менее одного. Что из этого соответствует инъективности, а что — сюръективности?

Пример 7.16. Рассмотрим отображение $c: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, заданное формулой

$$c(x, y) = \binom{x + y + 1}{2} + y.$$

Докажем, что это биекция.

Для каждого n рассмотрим множество пар натуральных чисел

$$S_n = \{(x, y) : x + y = n\}.$$

Пары из множества S_n однозначно задаются ординатами, другими словами, есть биекция между S_n и целыми числами отрезка $[0, n]$.

На множестве S_n отображение c прибавляет к координате y число $\binom{n+1}{2}$. Поэтому оно задаёт биекцию между S_n и целыми точками отрезка

$$\left[\binom{n+1}{2}; \binom{n+1}{2} + n \right].$$

Из определения ясно, что множества S_n и S_m не пересекаются при $n \neq m$, а всё множество пар натуральных чисел является объединением множеств S_n , $n \in \mathbb{N}$.

Если доказать, что отрезки указанного выше вида не пересекаются, а их объединение совпадает с \mathbb{N} , получим искомое: отображение c тогда является биекцией между $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и \mathbb{N} .

По одному из основных свойств биномиальных коэффициентов имеем равенство

$$\binom{n+2}{2} = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+1}{2} + n + 1.$$

Это и означает, что отрезки не пересекаются и в объединении дают всё \mathbb{N} : каждый следующий отрезок начинается непосредственно после предыдущего.

Замечание: понять, что отображение c является биекцией, намного проще, если написать его значения на точках координатного квадранта. Оставляем это читателю в качестве самостоятельного упражнения.

7.4.2 Биекции и сравнение множеств

Задача 7.17. Пусть A и B — конечные множества, состоящие из a и b элементов. При каком условии на a и b существует инъекция $f: A \rightarrow B$? Тот же вопрос для сюръекций и биекций.

Пояснения. Если посмотреть на картинку, сопровождающие определения, ответ становится ясен: при $a \leq b$ существует инъекция $f: A \rightarrow B$, при $a \geq b$ существует сюръекция $f: A \rightarrow B$, при $a = b$ существует биекция $f: A \rightarrow B$.

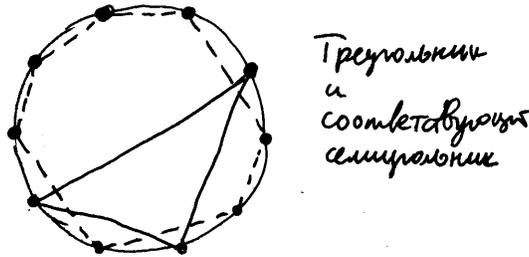
Однако это лишь иллюстрации. В чем же состоит рассуждение, которое доказывает утверждение задачи? Иногда так бывает, что очевидные факты требуют довольно громоздких доказательств. Это как раз тот самый случай. Мы к нему вернёмся в лекции 9. \square

Установление взаимно однозначного соответствия (биекции) часто является удобным способом показать, что в двух множествах одинаковое количество точек.

Задача 7.18. На окружности выбрано 10 точек. Чего больше: треугольников с вершинами в этих точках или выпуклых семиугольников с вершинами в этих точках?

Решение. Ответ: их поровну.

Есть взаимно однозначное соответствие между этими множествами: треугольнику соответствует выпуклый семиугольник, соединяющий остальные вершины



На самом деле, конечно, треугольник и семиугольник тут только для рисунка, а речь идёт о трёх- и семиэлементных подмножествах десятиэлементного множества и равенстве $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$. \square

Задача 7.19. На окружности выбрано несколько чёрных точек и одна белая. Чего больше: треугольников с чёрными вершинами или выпуклых четырёхугольников с тремя чёрными и одной белой вершиной? выпуклых многоугольников, у которых все вершины чёрные, или выпуклых многоугольников, у которых все вершины, кроме одной, чёрные, а одна белая?

Решение. Ответ на первый вопрос «поровну».

Важно заметить, что выпуклый многоугольник однозначно задаётся своими вершинами. Поэтому в первом случае нужно построить такую биекцию: каждым трём

чёрным точкам (вершинам чёрного треугольника) сопоставим четвёрку точек, в которую входят эти же точки и ещё белая вершина. Это сюръекция: отбросив белую точку, получаем тройку чёрных точек. Эта тройка чёрных точек однозначно определяется выпуклым четырёхугольником с тремя чёрными и одной белой вершиной. Значит, это и инъекция. То есть мы установили биекцию между множествами, поэтому в них одинаковое количество элементов.

Во втором случае рассуждение аналогично, но ответ зависит от того, что понимать под выпуклым многоугольником. Мы используем стандартное школьное определение. Из этого определения, в частности, следует, что в многоугольнике не меньше 3 вершин. Соответствие, при котором многоугольнику с чёрными вершинами сопоставлен многоугольник с теми же вершинами и добавленной белой вершиной, является инъекцией аналогично предыдущему. Но теперь это соответствие не является сюръекцией: треугольник с двумя чёрными и одной белой вершинами не имеет прообраза.

Ответ на второй вопрос: выпуклых многоугольников, у которых все вершины чёрные, меньше, чем выпуклых многоугольников, у которых все вершины, кроме одной, чёрные, а одна белая. \square

Приведём три важные и очень естественные биекции, которые уже встречались и будут дальше встречаться постоянно.

Для натурального n рассмотрим три множества.

1. Подмножества n -элементного множества, для определённости пусть это будет множество целых чисел от 1 до n , которое мы для краткости обозначим $[n]$;
2. Отображения множества $[n]$ в множество $\{0, 1\}$;
3. Множество двоичных слов длины n .

Между этими множествами есть очень простые и естественные биекции, которые позволяют переходить от высказываний об одном из этих множеств к высказываниям о другом.

Подмножеству $S \subseteq [n]$ соответствует индикаторная функция

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in S, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это соответствие взаимно однозначно: индикаторная функция однозначно определяется по множеству, но и для любого отображения $f: [n] \rightarrow \{0, 1\}$ множество найдётся однозначно. А именно, для $S = f^{-1}(\{1\})$ выполняется равенство

$$f(x) = \chi_S(x)$$

для всех x .

Если расположить числа от 1 до n в порядке возрастания и записать значения отображения $f: [n] \rightarrow \{0, 1\}$, получим двоичное слово. И это соответствие также

взаимно однозначно. По двоичному слову длины n соответствующая ему функция определяется так: $f(i)$ равно символу, который стоит в слове на i -м месте.

Аналогичная биекция есть и с подмножествами: слову соответствует подмножество номеров единиц в двоичном слове.

Заметим также, что первая биекция может быть определена и для бесконечных множеств.

Инъекции, сюръекции и биекции можно использовать для сравнения бесконечных множеств на предмет выяснения того, «где больше элементов». Но тут надо быть осторожным. Ещё Галилей (тот самый, которому приписывают фразу «а всё-таки она вертится» после допросов «компетентными органами»⁶) заметил, что точные квадраты натуральных чисел ($0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, \dots$) составляют лишь небольшую часть натуральных чисел, но находятся с ними во взаимно однозначном соответствии ($x \mapsto x^2$), и что маленький отрезок в этом смысле содержит столько же точек, сколько большой.

Задача 7.20. Как установить взаимно однозначное соответствие между отрезками разной длины?

Подсказка. Вспомните про подобия и пропорции. Или см. лекцию 9. □

Галилей заключил, что про бесконечные множества нет смысла спрашивать, какое из них больше, и единственное, что мы можем сказать, что они бесконечны. Лишь через три с лишним века Георг Кантор понял, что это не так и что для бесконечных множеств такое сравнение тоже имеет смысл, только нужно быть аккуратным. В частности, он понял, что на отрезке больше точек, чем натуральных чисел в натуральном ряду. Мы этим займёмся позже (см. лекцию 9).

7.5 Композиции функций

Функции можно применять одну за другой. В результате получается новая функция, которая называется *композицией*.

7.5.1 Определение

Определение 7.3. Пусть даны функции f из множества A в множество B и g из множества B в множество C . Их *композицией* называется функция $g \circ f$ из A в C , которая определена на тех x из области определения f , для которых $f(x)$ принадлежит области определения g , и равна $g(f(x))$.

С точки зрения программиста композицию можно описать так:

```
function GoF(a:A):C;
  var b:B;
  begin b:=F(a); GoF:=G(b); end;
```

⁶В истории науки Галилей более известен тем, что по праву считается основателем современной физики и целого ряда прикладных наук, включая метеорологию.

Здесь A, B, C задают типы соответствующих переменных; мы для наглядности упомянули переменную типа B , но можно было бы просто написать

```
function GoF(a:A):C;
begin GoF:=G(F(a)); end;
```

Композиция функций очень наглядно изображается графически, см. рис. 7.10. Стрелки, отвечающие композиции, получаются соединением стрелок, отвечающих функциям f и g .

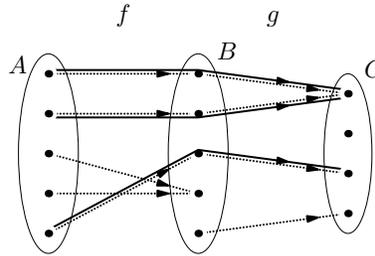


Рис. 7.10: композиция функций $g \circ f$

Обратите внимание, что в записи $g \circ f$ мы сначала пишем ту функцию, которая применяется второй, — просто потому, что такой же порядок в записи $g(f(x))$. Если бы мы обозначали значение функции f на x не $f(x)$, а xf или $(x)f$ (чему ничего не препятствует, кроме традиции⁷), то и в обозначении для композиции было бы логично писать f и g в другом порядке.

Задача 7.21. Пусть f всюду определена, а g не всюду определена. Верно ли, что композиция $g \circ f$ не всюду определена?

Решение. Ответ: нет.

Рассматриваем функции из \mathbb{N} в \mathbb{N} . Пусть $f(x) = 0$ для всех x , $g(0) = 1$, а при $x > 0$ функция g не определена. Тогда $g \circ f(x) = 1$ для всех x , \square

Задача 7.22. Какое преобразование плоскости является композицией двух осевых симметрий? (Тут есть два случая: когда оси симметрий пересекаются и когда они параллельны.)

Указание. Для знающих геометрию это несложное упражнение. Остальным читателям лучше пропустить эту задачу (и аналогичные задачи из раздела 7.7) и вернуться к ним после изучения геометрии. \square

⁷Более того, аналогичные обозначения иногда используются в математике.

7.5.2 Ассоциативность

Композиция функций обладает свойством *ассоциативности*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Здесь мы предполагаем, что множества, для которых определены функции, выбраны согласованно, то есть h это функция из множества A в множество B , g это функция из множества B в множество C , а f это функция из множества C в множество D (иначе композиции нельзя определить).

Ассоциативность проще понять, чем объяснить: обе части равенства задают функции r_1 и r_2 из множества A в множество D . Равенство $y = r_1(x)$ равносильно тому, что найдётся такое $z \in B$, что выполняются равенства $z = h(x)$, $y = (f \circ g)(z) = f(g(z))$.

Обозначим $u = g(z)$. Тогда $u = (g \circ h)(x)$ и $y = f(u)$, что по определению равносильно $y = r_2(x)$.

В обратную сторону рассуждение аналогичное.

Графически свойство ассоциативности выражается очень наглядно. Проследите за предыдущим рассуждением по рисунку 7.11.

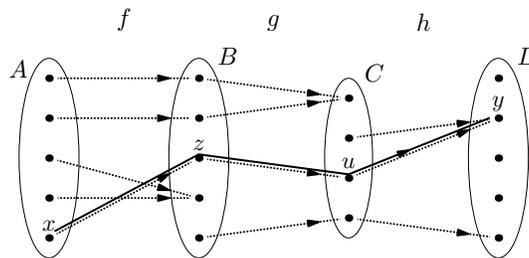


Рис. 7.11: ассоциативность композиции. Стрелка, отвечающая композиции, заменяет путь по трём стрелкам, отвечающим функциям h , g и f соответственно

7.5.3 Обратная функция

Тождественной функцией на множестве A (или тождественным отображением множества A в себя) называется функция $\text{id}_A: A \rightarrow A$, которая отображает всякий элемент $x \in A$ в себя: $\text{id}_A(x) = x$. При композиции тождественные функции ведут себя, как единица при умножении: для любого отображения $f: A \rightarrow B$ выполнены равенства

$$\text{id}_B \circ f = f \circ \text{id}_A = f.$$

(Обратите внимание, что здесь две тождественные функции — одна на A , другая на B , иначе композицию нельзя определить.)

Если отображение $f: A \rightarrow B$ является биекцией (взаимно однозначным соответствием), то можно определить *обратную функцию* (или обратное отображение) f^{-1} :

если f отображает x в y , то обратная функция f^{-1} отображает y в x . Инъективность f гарантирует, что это действительно функция, а сюръективность f гарантирует, что эта функция определена на всём B .

Заметим, что определение обратной функции симметрично: если g обратна к f , то и f обратна к g .

Пример 7.23 (Продолжение примера 7.16.). Как задать отображение, обратное к отображению $c: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ из примера 7.16?

Давайте найдём $c^{-1}(11)$. Для этого полезно выписать ряд отрезков, соответствующих множествам S_n :

$$[0; 0], [1; 2], [3; 5], [6; 9], [10; 14].$$

Число 11 попадает в отрезок $[10; 14]$. Обозначим $c^{-1}(11) = (a, b)$. Тогда $a + b = 4$, причём из определения $c(x, y)$ получаем, что $11 = 10 + b$, то есть $b = 1$, $a = 3$.

Аналогично определяется обратная функция и в общем случае. Правило вычисления $c^{-1}(x)$ такое:

- найти наибольшее n такое, что $\binom{n}{2} \leq x$;
- присвоить $b := x - \binom{n}{2}$; $a := n - b - 1$;
- пара $(a; b)$ является значением $c^{-1}(x)$.

Обозначение f^{-1} для обратной функции не случайно: мы сравнили композицию с умножением, а тождественную функцию с единицей. Продолжая эту линию, можно заметить ещё одно свойство, аналогичное свойству умножения.

Утверждение 7.1. Для биекции $f: A \rightarrow B$ выполнены равенства

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_A \quad \text{и} \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_B.$$

Доказательство. Возьмём $x \in A$. Пусть $f(x) = y$. Тогда по определению обратной функции $f^{-1}(y) = x$, а по определению композиции $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$. Значит, $(f^{-1} \circ f) = \text{id}_A$.

Возьмём $y \in B$. Пусть $f^{-1}(y) = x$. Тогда по определению обратной функции $f(x) = y$, а по определению композиции $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$. Значит, $(f \circ f^{-1}) = \text{id}_B$. \square

Замечание 7.1. К сожалению, как это нередко бывает, обозначение f^{-1} двусмысленно: оно указывает как на обратную функцию, так и на полный прообраз множества. Различить эти случаи обычно легко из контекста. Важно помнить, что обратная функция определена только для биекций, а полный прообраз множества определён для любой функции.

Обращение утверждения 7.1 даёт простой критерий обратной функции.

Теорема 7.2. Если для отображений $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow A$ выполнены два равенства $g \circ f = \text{id}_A$ и $f \circ g = \text{id}_B$, то функция f является биекцией и g обратна к f .

Доказательство. Пусть $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда из первого условия на композиции получаем:

$$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2.$$

Значит, функция f инъективна.

Для любого $y \in B$ из второго условия на композиции следует, что $y = f(g(y))$, то есть y принадлежит множеству значений f . Значит, функция f сюръективна.

Итак, f биекция.

Если $y = f(x)$, то из первого условия на композиции получаем $g(y) = g(f(x)) = x$. Значит, g обратна к f . \square

7.5.4 Степени композиций

Если функция f отображает множество A в себя, то можно рассмотреть её композицию с собой. Получится функция $f \circ f$, которую обозначают ещё f^2 . Надо только не путать с обычным возведением в квадрат, поскольку \sin^2 может обозначать и функцию $x \mapsto \sin(\sin(x))$, и функцию $(\sin x)^2$. Аналогично определяется и $f^3(x) = f(f(f(x)))$, и вообще $f^k(x)$, называемая также k -й итерацией функции f .

Задача 7.24. Докажите, что для любой функции $f: A \rightarrow A$, отображающей конечное множество A в себя, найдутся различные целые положительные m, n , при которых f^m и f^n совпадают.

Решение. Всего функций из конечного множества в конечное имеется лишь конечное число (см. следующий раздел 7.6). Поэтому в последовательности функций f^n обязательно есть одинаковые. \square

Задача 7.25. Докажите, что для любой биекции $f: A \rightarrow A$ конечного множества A в себя существует целое положительное n , при котором $f^n = \text{id}_A$.

Решение. Пусть $f^m = f^n = f^{m-n} \circ f^n$ (мы считаем, что $m > n$). Для f есть обратная g , для которой $f \circ g = \text{id}_A$. Тогда

$$f^2 \circ g^2 = f \circ f \circ g \circ g = f \circ \text{id}_A \circ g = f \circ g = \text{id}_A$$

(используем ассоциативность композиции).

По индукции доказываем, что $f^k \circ g^k = \text{id}_A$ (выше фактически выписан индуктивный переход от $k = 1$ к $k = 2$, общий случай записывается аналогично).

Поэтому

$$\text{id}_A = f^n \circ g^n = f^{m-n} \circ f^n \circ g^n = f^{m-n}$$

(опять используем ассоциативность композиции). \square

Биекции конечного множества называют перестановками этого множества, а минимальное n с указанным в задаче свойством называют *порядком* перестановки.

Композицию перестановок называют также их *произведением* и говорят о *группе перестановок*. Группу перестановок n -элементного множества называют также *симметрической группой* и обозначают S_n .

Задача 7.26. Мы уже определили f^n при целом $n \geq 2$, а также f^{-1} для биекций. Как надо определить f^0 , f^1 и отрицательные степени (для биекций), чтобы выполнялось равенство

$$f^{m+n} = f^m \circ f^n$$

(при любых целых m и n)?

Решение. Полагаем $f^0 = \text{id}$, $f^1 = f$, а для биекции f , обратная к которой g , полагаем $f^{-n} = g^n$.

Выше мы уже проверили, что $f^n \circ f^{-n} = \text{id} = f^0$. Для $m > 0 > -n$ проверка выполняется аналогично:

$$f^m \circ f^{-n} = f^m \circ g^n = f^{m-1} \circ g^{n-1} = \begin{cases} f^{m-n}, & \text{если } m > n, \\ g^{n-m}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В обоих случаях полученное выражение совпадает с f^{m-n} . При $n > 0 > -m$ рассуждения аналогичные. \square

7.6 Подсчёты

Посчитаем, сколько есть разных отображений $f: A \rightarrow B$. Для каждой точки $x \in A$ (для каждого элемента $x \in A$) есть n возможных значений для $f(x)$ (это значение может быть любым элементом множества B). Они выбираются независимо, так что всего есть n^m функций. Упомянем кстати, что множество всех всюду определённых функций $A \rightarrow B$ часто обозначается как B^A .

Раньше мы считали слова длины m , составленные из букв n -элементного алфавита. Это в сущности тот же самый подсчёт, поскольку каждое такое слово есть отображение множества из m позиций в алфавит.

Можно подсчитать и не всюду определённые функции из A в B . Теперь для каждого $f(x)$ есть $n+1$ вариантов: это значение может быть не определено, а может быть любым элементом множества B . Соответственно получаем ответ $(n+1)^m$.

Сколько есть биекций $A \rightarrow B$? Если $m \neq n$, то нет ни одной. А если $m = n$? Будем снова выбирать значения по очереди, расположив все n элементов A в каком-то порядке. Для первого элемента допустимы все n значений, для второго — все, кроме одного (уже использованного раньше), для третьего — $(n-2)$ и так далее, всего получается $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Собственно говоря, мы повторили рассуждение о перестановках; биекции — это просто научное название для тех же перестановок.

Аналогично можно подсчитать инъекции. Если $m > n$, то их нет (большее множество не может быть инъективно отображено в меньшее). Если $m \leq n$, то аналогичное рассуждение даёт $n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$ (или $n!/m!$).

А вот для сюръекций дела немного хуже, и формула содержит суммирование. (Впрочем, и факториал тоже скрывает в себе много операций, так что принципиально разница невелика.)

Теорема 7.3. *Количество сюръекций m -элементного множества в n -элементное при $m \geq n$ равно*

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (n-k)^m.$$

(и равно нулю при $m < n$).

Напомним, что сюръекции должны быть определены на всех m элементах.

Доказательство. Надо воспользоваться формулой включений и исключений. Пусть B состоит из n элементов b_1, \dots, b_n . Не-сюръекции $A \rightarrow B$ — это те функции, область значений которых не содержит одного из элементов b_1, \dots, b_n , то есть объединение множеств

$$A(b_1) \cup A(b_2) \cup \dots \cup A(b_n),$$

где через $A(b)$ обозначается множество тех функций, которые не принимают значения b . Легко понять, что все множества $A(b)$ имеют размер $(n-1)^m$ (мы просто выбросили одно значение). Более того, столь же легко посчитать размер их пересечений: если $b \neq b'$, то $A(b) \cap A(b')$ — это функции, не принимающие значений b и b' , их будет $(n-2)^m$. Остаётся воспользоваться формулой включений и исключений: из всех функций (n^m) надо вычесть n множеств вида $A(b_i)$, то есть $n(n-1)^m$, затем поскоблаться, что мы вычли лишнее и вернуть обратно $\binom{n}{2}$ их попарных пересечений, всего $\binom{n}{2}(n-2)^m$, затем снова вычесть тройные пересечения, которых $\binom{n}{3}$ и каждое из которых имеет размер $(n-3)^m$, и так далее. \square

С точки зрения программирования эта формула даёт быстрый — по сравнению с перебором всех сюръекций — алгоритм нахождения их количества.

Замечание 7.2. Для количества сюръекций выполняется рекуррентное соотношение с граничными условиями

$$\begin{aligned} \text{Surj}(m, n) &= n \text{Surj}(m-1, n) + \text{Surj}(m-1, n-1), \\ \text{Surj}(0, 0) &= 1, \quad \text{Surj}(m, 0) = 0, \quad \text{при } m > 0, \\ \text{Surj}(m, n) &= 0 \quad \text{при } m < n \end{aligned}$$

(проверьте!).

Это соотношение также можно использовать для подсчёта сюръекций. Какой из способов лучше, сразу и не сообразишь. Но способы вычислений можно сравнить экспериментально.

Попробуйте написать программы для обоих способов и сравните время их работы при достаточно больших m и n (чтобы время счёта занимало десятки секунд — иначе разница во времени будет неубедительна).

Заметим, что подсчитанное нами число сюръекций делится на $n!$, поскольку сюръекцию можно строить в два шага: сначала разбить m элементов на n непустых групп, решив отнести в одну группу те элементы, у которых одинаковый образ, а затем решить, как соотносятся эти группы с элементами B (выбрав одну из $n!$ биекций). Количество разбиений m элементов на n непустых группы (= количество отношений эквивалентности на m -элементном множестве, имеющих n классов эквивалентности) называется иногда *числом Стирлинга второго рода* — в честь того же Стирлинга, что и приближённая формула $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$. Оно обозначается $S(m, n)$ или $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$ и вычисляется по той же формуле, только надо поделить на $n!$ в конце.

7.7 Задачи для самостоятельного решения

27. Функция f определена на множестве $A \cup B$ и принимает значения в множестве Y . Какой знак сравнения можно поставить вместо $?$, чтобы утверждение

$$f(A \setminus B) ? f(A) \setminus f(B)$$

стало верным?

28. Функция f определена на множестве X и принимает значения в множестве Y , при этом $A \cup B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо $?$, чтобы утверждение

$$f^{-1}(A \setminus B) ? f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

стало верным?

29. Верно ли для любых f, X, Y что $f(X) \cap Y = \emptyset$ равносильно $X \cap f^{-1}(Y) = \emptyset$? следует $X = Y$?

30. При каких условиях на действительные числа a, b, c функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемая равенством $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, является инъекцией, при каких сюръекцией и при каких биекцией?

31. Докажите, что

а) композиция инъекций является инъекцией;

б) композиция сюръекций является сюръекцией.

32. Докажите, что $f^{-1}(g^{-1}(Z)) = (g \circ f)^{-1}(Z)$ для любого $Z \subseteq C$ и любых функций f из множества A в множество B и g из множества B в множество C . Здесь f^{-1} обозначает полный прообраз множества.

33. Какое преобразование является композицией двух центральных симметрий?

34. Какое преобразование является композицией двух поворотов вокруг разных точек, если повороты на один и тот же угол, но в разные стороны (один по часовой стрелке, другой против)?

35. Докажите, что любое движение плоскости (преобразование, сохраняющее расстояния) является композицией двух или трёх осевых симметрий.

36. Дробно-линейной функцией называют функцию вида

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

где a, b, c, d — некоторые вещественные числа (константы). Покажите, что композиция двух дробно-линейных функций почти дробно-линейна (и объясните, в каком смысле «почти»).

ЗАМЕЧАНИЕ: Знающие линейную алгебру могут заметить, что коэффициенты композиции дробно-линейных функций вычисляются так же, как при умножении матриц 2×2 (и объяснить, почему).

37. Функция f на двоичных словах длины n задана следующим правилом: в слове x найдём самый правый 0 и заменим его на 1, а все 1, которые стоят правее этого нуля, заменим на нули. Получим слово $f(x)$. Это правило неприменимо к $x = 1^n$, в этом случае определим значение функции отдельно: $f(1^n) = 0^n$.

а) Проверьте, что f биекция. **б)** Найдите f^{-1} (задайте правило, по которому из слова x получается слово $f^{-1}(x)$).

38. Определение обратной функции включает два требования. Иногда их разделяют и говорят, что $g: B \rightarrow A$ является *левой обратной* (соответственно *правой обратной*) к f , если $g \circ f = \text{id}_A$ (соответственно $f \circ g = \text{id}_B$).

а) Приведите примеры, когда левая обратная не является правой обратной и когда правая обратная не является левой.

б) Может ли такое случиться для конечных множеств?

с) Может ли быть так, что у одной функции есть и левая, и правая обратные, но они различны?

д) Для каких функций существует левая обратная?

е) Для каких функций существует правая обратная?

39. Рассмотрим функцию $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, заданную формулой $f(x) = 4x(1 - x)$. (Коэффициент подобран так, чтобы областью значений был как раз отрезок $[0, 1]$.) Сколько решений имеют уравнения $f(x) = x$? $f(f(x)) = x$? $f^n(x) = x$? (В последнем случае мы имеем в виду композицию n копий функции f , а не возведение числа в степень n .)

40. Покажите, что порядок любой перестановки n -элементного множества делит нацело число $n!$.

41. Циклом $(a_1 a_2 \dots a_n)$ называется перестановка (биекция на конечном множестве), при котором элемент a_1 переходит в a_2 , в свою очередь a_2 переходит в a_3 и так далее до a_n , которое переходит в a_1 . (При $n = 2$ получается обмен двух элементов, или, как говорят, *транспозиция*; при $n = 1$ можно считать, что получится тождественная перестановка.) Покажите, что всякую перестановку можно представить как композицию нескольких циклов, не содержащих общих элементов.

42. Покажите, что каждую перестановку можно представить в виде произведения некоторого числа транспозиций, причём чётность этого числа будет одинаковой во всех представлениях. (Скажем, любое разложение тождественной перестановки в произведение транспозиций содержит чётное число транспозиций.)

43. Найдите количество **а)** неубывающих функций $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$; **б)** неубывающих инъекций $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$; **с)** неубывающих сюръекций $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$.

Функция неубывающая, если $x \leq y$ влечёт $f(x) \leq f(y)$.

Лекция 8

Отношения и их графы

Помимо множеств и функций математический формализм включает третий необходимый элемент: отношения. В этой лекции мы введём необходимые определения и обсудим основные свойства отношений.

Путеводитель по главе 8:

В разделе 8.1 обсуждаются истоки понятия «отношение» в естественном языке.

Раздел 8.2 содержит определения математического понятия «отношение» и родственных понятий.

В разделе 8.3 обсуждаются важные свойства отношений, постоянно встречающиеся в математике, и приводятся примеры.

Раздел 8.4 содержит описание связей между графами и отношениями.

В разделе 8.5 более подробно обсуждается один из самых важных примеров отношений: отношения эквивалентности.

В разделе 8.6 на отношения обобщается операция композиции, определённая ранее для функций.

В разделе 8.7 приводятся некоторые комментарии по поводу этой и нескольких предыдущих глав.

Раздел 8.8 содержит задачи для самостоятельного решения.

8.1 Отношения в естественном языке

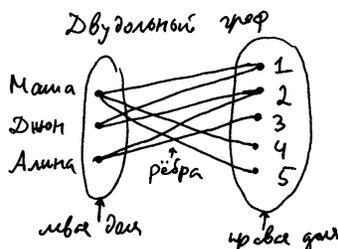
В естественном языке множествам соответствуют свойства. Часто эти свойства выражаются прилагательными. Например, прилагательное «красный» соответствует множеству объектов, которые мы считаем красными. Лингвисты говорят о «предикатах» как свойствах, которыми может обладать (или не обладать) субъект — математики говорят о соответствующих множествах, которые могут содержать (или

не содержать) этого самого субъекта (он может быть их элементом или не быть). Как мы видели, этот перевод может быть продолжен — пересечению множеств соответствует союз «и», объединению — союз «или» (понимаемый в неисключительном смысле).

Но сейчас нас интересует другая конструкция языка и её формализация: когда после контрольной говорят, что «Маша решила задачу 4», это означает, что Маша и задача 4 находятся в некотором *отношении*, в котором они могут находиться или не находиться. Математики видят в этой фразе два множества G (все студенты группы, где была контрольная) и P (все задачи, предлагавшиеся на контрольной), и — как они говорят — «бинарное отношение» между множествами, которое указывает, кто чего решил. Это отношение можно представлять себе разными способами. Можно в списке группы у каждой фамилии написать номера решённых задач. Можно (хотя и менее привычно) у каждой задачи написать студентов, которые её решили. Можно составить таблицу наподобие такой:

	1	2	3	4	5
Маша	+		+	+	+
Джон	+	+			
Алина		+	+		

А можно нарисовать двудольный граф: в левой доле вершинами изобразить студентов, в правой доле вершинами считать задачи, и провести рёбра, соответствующие успеху при решении задач:



Контрольный вопрос 8.1. На этой картинке есть ошибка — точнее, есть несоответствие между картинкой и таблицей с плюсами выше. Найдите его. Как надо исправить таблицу или картинку, чтобы его устранить?

Во всех случаях мы представляем (разными способами) одну и ту же информацию (считаем, что несоответствие, о котором шла речь в задаче, исправлено). Различие в способах представления становится важным, если нас интересует удобство хранения и обработки этой информации — соответствующий раздел в программировании изучает различные «структуры данных» для представления множеств, отношений и других абстрактных объектов.

8.2 Отношения с точки зрения математики

С точки зрения математики, наше отношение задаётся (как мы уже говорили) множествами G , P и некоторым подмножеством декартова произведения $G \times P$ множеств G и P . В него входят следующие упорядоченные пары:

(Маша, 1), (Маша, 2), (Маша, 3), (Маша, 4), (Маша, 5),
 (Джон, 1), (Джон, 2), (Джон, 3), (Джон, 4), (Джон, 5),
 (Алина, 1), (Алина, 2), (Алина, 3), (Алина, 4), (Алина, 5).

Мы перечислили их в этом порядке, но порядок не играет роли — множество $G \times P$ состоит из этих 15 элементов. Если вспомнить нашу таблицу, то элементы множества $G \times P$ соответствуют клеточкам таблицы: в каждой клеточке понятно, о каком студенте и о какой задаче идёт речь. Отношение, задаваемое нашей таблицей, состоит из 8 элементов, соответствующих плюсам в таблице:

(Маша, 1), (Маша, 3), (Маша, 4), (Маша, 5), (Джон, 1), (Джон, 2), (Алина, 2), (Алина, 3).

Определение 8.1. *Бинарным отношением на множествах A и B называется любое подмножество R декартова произведения $A \times B$.*

Мы говорим, что элементы $a \in A, b \in B$ находятся в отношении R , если $(x, y) \in R$. Есть несколько вариантов обозначения для этого: пишут, например aRb или $R(a, b)$. Скажем, в нашем примере можно ввести имя *Решил* для рассмотренного отношения, и сказать, что *Решил*(Маша, 3) истинно, а *Решил*(Джон, 4) ложно.

Слово «бинарное» подчёркивает, что речь идёт об отношении между элементами двух множеств. Наряду с бинарными отношениями мы можем рассмотреть отношения и любой другой «валентности», или «арности». Назовём *k-арным отношением на множествах A_1, \dots, A_k* любое подмножество множества $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$. При $k = 1$ говорят об *унарных* отношениях — это уже знакомые нам свойства, при $k = 3$ получаются *тернарные*. Одно и то же слово русского языка может использоваться для обозначения отношений разной валентности. Скажем, «Маша бьёт Джона» сообщает об элементе бинарного отношения, а в более подробном сообщении «Маша бьёт Джона веником» то же самое слово «бьёт» описывает тернарное отношение (как сказали бы лингвисты, «имеет три актанта»). Последнее сообщение можно было бы записать как *Бьёт*(Маша, Джон, веник).

Если множества A и B , на которых определено бинарное отношение, совпадают, то говорят просто о бинарном отношении на множестве A . Аналогично определяются *k-арные* отношения. Например, можно рассмотреть тернарное отношение «быть суммой» на множестве целых чисел: оно состоит из троек (a, b, c) , для которых $a = b + c$.

В современных информационных системах используют так называемые «реляционные базы данных» — наверное, многие слышали о языке запросов SQL, который используют для обращения к таким базам. Слово «реляционные» (relational) происходит от английского слова “relation”, означающего «отношение». В реляционной

базе данных информация (о мире) хранится в виде отношений: скажем, понятие «место жительства» рассматривается как отношение между множеством людей и множеством жилых помещений, и т. д. Это оказалось достаточно удобным и универсальным подходом к представлению различной информации.

Контрольный вопрос 8.2. Представим себе, что проверяющие контрольную ставят за каждую задачу один из знаков $0, -, \mp, \pm, +$. Как можно представить результаты контрольной в виде тернарного отношения?

Важнейший пример бинарных отношений, который мы подробно обсуждали в предыдущей главе — это функции. Вспомните, что функции мы отождествляем с их графиками, а график функции из множества A в множество B по определению является подмножеством декартова произведения $A \times B$.

Графики функций обладают особым свойством: при $y_1 \neq y_2$ графику функции может принадлежать лишь одна из пар $(x, y_1), (x, y_2)$. Допуская вольность речи, можно сказать, что бинарные отношения — это «многозначные» функции.

8.3 Свойства бинарных отношений

Мы будем в первую очередь говорить о бинарных отношениях. Унарные отношения — это просто множества, мы их уже обсуждали, а бинарные отношения сложнее, в них уже есть какая-то внутренняя структура, и тут есть о чём поговорить.

Бинарное отношение R на множестве X называют *симметричным*, если из $R(x, y)$ следует $R(y, x)$. Многие слова русского языка такую симметрию подразумевают: скажем, отношение « x — родственник y » на множестве всех людей обычно считают симметричным (хотя, конечно, может случиться и так, что A считает B своим родственником, а B и знать A не желает). Примерно то же самое можно сказать об отношении « x знаком с y », или отношении « x и y — соседи». Другие отношения, скажем « x посылал y письмо» или « x — мать y », не симметричны. В последнем примере $R(x, y)$ вообще несовместно с $R(y, x)$: из двух утверждений « x — мать y » и « y — мать x » хотя бы одно ложно.

Задача 8.1. Докажите, что если отношение знакомства между людьми симметрично, то количество людей, имеющих нечётное число знакомых, чётно.

Указание. Вспомните про соотношение между степенями вершин графа. □

Задача 8.2. Является ли отношение « x — брат y » (в самом простом, генеалогическом смысле) симметричным?

Указание. У Маши может быть брат Вася. □

Другое свойство бинарных отношений на некотором множестве: отношение R *транзитивно*, если из $R(x, y)$ и $R(y, z)$ следует $R(x, z)$. Например, отношение «быть предком» на множестве всех людей транзитивно: если A — предок B , а B — предок V , то A — предок V . А отношение «быть отцом» не транзитивно. Классическая фраза

«вассал моего вассала не мой вассал» (не будем вдаваться в уточнение того, что это значит и в каких странах и когда так было) теперь может быть сформулирована научно: «отношение вассалитета не обязано быть транзитивным».

Контрольный вопрос 8.3. Будет ли отношение « x знаком с y » на множестве людей транзитивным?

Много транзитивных отношений возникает в процессе сравнений: естественно считать, что отношения « x выше y », « x сильнее y », « x красивее y » и т. п. подразумевают транзитивность — её отсутствие воспринимается как парадокс (как в игре камень–ножницы–бумага, когда камень сильнее ножниц, ножницы сильнее бумаги, а бумага сильнее камня).

Задача 8.3. Является ли отношение «быть делителем» на множестве положительных целых чисел симметричным? транзитивным? Тот же вопрос для отношения «быть взаимно простым» (не иметь общих делителей, кроме 1) на том же множестве.

Решение. Отношение «быть делителем» несимметрично, но транзитивно. Число 2 является делителем числа 4, а обратное неверно. С другой стороны, если a является делителем b , то $b = qa$ для некоторого целого числа q ; если b является делителем c , то $c = rb$ для некоторого целого числа r . Значит, $c = rb = (rq)a$ и a является делителем c .

Отношение «быть взаимно простым» симметрично, но нетранзитивно. Нетранзитивность легко увидеть на примере: 2 взаимно просто с 3, 3 взаимно просто с 4, но 2 и 4 не взаимно просты: у них есть общий делитель 2.

Симметричность этого отношения вытекает прямо из определения: общий делитель есть у (неупорядоченной) пары чисел. \square

Будет ли отношение « x — родственник y » транзитивным? Хочется сказать, что да и что родственник твоего родственника — твой родственник. С другой стороны, есть опасность таким образом распространить родство на всех ныне живущих людей (даже если и не считать, что все они потомки Адама — и без этого родственных связей довольно много). Это — типичная ситуация «парадокса кучи» — добавление одной песчинки не может превратить в кучу то, что раньше кучей не было, но тем не менее кучи бывают.

Третье свойство бинарного отношения, *рефлексивность*, означает, что $R(x, x)$ для любого x . (Слово «рефлексия» означает размышления о самом себе.) Интересно, что наша языковая интуиция не всегда отчётлива в этом месте: будет ли, например, отношение « x знаком с y » рефлексивным? Знаком ли человек с самим собой? Это уже вопрос с философским оттенком: совет «Познай самого себя» ничего не говорит о том, была ли эта попытка познания успешной. Скорее, видимо, нет — когда человек говорит, что у него есть трое знакомых, вряд ли он включает в них себя. Является ли человек своим собственным однофамильцем? своим собственным родственником? своим собственным соседом?

В математике, конечно, такая неопределённость недопустима, и говоря о бинарном отношении, мы должны заранее решить, что мы думаем по поводу отношения объекта с самим собой. Скажем, отношение $x \leq y$ будет рефлексивным (поскольку $x \leq x$ для любого x), а отношение $x < y$ не будет.

Более того, $x < x$ ложно для всех чисел x . Если $(x, x) \notin R$ для всех x , такое отношение называется *антирефлексивным*.

Заметим, что если мы хотим считать отношение «быть родственником» симметричным и транзитивным, то придётся считать его рефлексивным: если А родственник Б, то по симметрии Б будет родственником А, и по транзитивности (ведь мы же не говорили, что все три элемента разные!) получаем, что А будет родственником самому себе.

Повторим, что все эти свойства (транзитивность, рефлексивность, антирефлексивность, симметричность) не имеют смысла для бинарных отношений между элементами A и B при $A \neq B$.

8.4 Графы, матрицы и бинарные отношения

Мы уже вводили понятие простого неориентированного графа. Это множество вершин V и некоторое подмножество E неупорядоченных пар его вершин (рёбер). Петли не допускаются, поэтому пары состоят из разных вершин.

Если посмотреть на графы с точки зрения отношений, то простой неориентированный граф — это симметричное антирефлексивное отношение на множестве вершин. Словами это отношение можно обозначить как «вершина u связана ребром с вершиной v ».

Ориентированные графы (без параллельных рёбер) — это произвольные бинарные отношения на множестве вершин. (Мы рассматривали только конечные графы, но это необязательно.)

Мы уже видели на примере в разделе 8.1, что бинарному отношению можно сопоставить простой неориентированный граф, причём двудольный. Опишем эту конструкцию для любого бинарного отношения $R \subseteq A \times B$ на множествах A и B .

Вершинами графа, отвечающего отношению R , будут элементы множеств A и B . Рёбра соединяют те пары вершин, которые находятся в отношении R . Формально это можно записать так:

$$E = \{\{a, b\} : (a, b) \in R\}.$$

Второй способ записи бинарных отношений на конечных множествах, который использовался в примере раздела 8.1, — в виде таблиц — имеет в математике специальное название *матрицы*. Обычно строки и столбцы матриц нумеруются положительными целыми числами, но это необязательно. Вместо чисел можно использовать любые множества. Ведь эти числа нужны только для того, чтобы можно было указать на элемент матрицы M_{ij} .

Матричные элементы матриц, отвечающих отношениям, принимают булевы значения 1 или 0. Задание отношения в виде матрицы обобщает индикаторные функции. На индикаторную функцию можно смотреть как на матрицу с одной строкой.

8.5 Отношения эквивалентности

Отношение на некотором множестве, которое одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно, называют *отношением эквивалентности*. Например, отношение «быть однофамильцем» (иметь одинаковую фамилию; мы сейчас считаем каждого человека своим собственным однофамильцем) или «быть одноклассником» (с той же оговоркой).

Вообще, если множество X разбито на непересекающиеся подмножества, то отношение «попасть в одно подмножество» будет отношением эквивалентности. Немного другой пример: пусть для каждого элемента множества X определена какая-то характеристика, скажем, «цвет» из какого-то заранее выбранного множества цветов. Тогда отношение «быть одного цвета» является отношением эквивалентности.

Оказывается, что это общая ситуация:

Теорема 8.1. *Любое отношение R , являющееся отношением эквивалентности на множестве A , делит A на классы эквивалентности — непересекающиеся подмножества множества X , при этом любые два элемента одного класса находятся в отношении R , а любые два элемента разных классов не находятся в отношении R .*

Доказательство. Пожалуй, тут сложнее понять, что тут вообще надо доказывать (и почему это не очевидно), чем доказать — но в качестве образца проведём подробно формальное рассуждение.

Для каждого $x \in A$ рассмотрим множество тех y , для которых верно $R(x, y)$. Обозначим его через $[x]$. Его можно было бы назвать «классом эквивалентности элемента x » — собственно говоря, так его и называют, но само по себе это название не гарантирует разбиения на классы, это ещё надо доказывать. А именно, надо доказать, что

- объединение всех множеств вида $[x]$ совпадает с множеством A ;
- два множества $[x]$ и $[y]$ либо не пересекаются, либо совпадают;
- наконец, надо ещё доказать, что $[x] = [y]$ в том и только том случае, когда $R(x, y)$, то есть R совпадает с отношением «принадлежать одному классу».

Как это доказать?

(1) В силу рефлексивности множество $[x]$ содержит x в качестве своего элемента: $x \in [x]$, поскольку $R(x, x)$. Отсюда следует, что объединение всех этих множеств совпадает с A . (Выйти за пределы A они не могут, так как мы рассматриваем отношение на множестве A и элементы множества A .)

(2) Пусть для двух элементов $x, y \in A$ их классы $[x]$ и $[y]$ пересеклись. Это означает, что есть такой $z \in A$, что $R(x, z)$ и $R(y, z)$. Симметричность даёт $R(z, y)$, после чего мы применяем транзитивность к $R(x, z)$ и $R(z, y)$ и заключаем, что $R(x, y)$. Выведем отсюда, что $[x] = [y]$. В самом деле, если произвольный элемент t принадлежит $[y]$, то $R(y, t)$. Вспоминая, что $R(x, y)$ и применяя транзитивность, получаем

$R(x, t)$, то есть $t \in [x]$. Мы доказали, таким образом, что $[y] \subset [x]$. Аналогично доказывается, что $[x] \subset [y]$, так что $[x] = [y]$.

(3) Если для каких-то x, y верно $R(x, y)$, то x и y оба лежат в одном классе, а именно, в $[x]$. Обратно, если x и y лежат в каком-то $[z]$, то по определению имеем $R(z, x)$ и $R(z, y)$, симметричность даёт $R(x, z)$ и после этого транзитивность даёт $R(x, y)$. \square

Замечание 8.1. Интересные вещи, связанные с этой теоремой, рассказывают биологи. Попытаемся разделить живые существа на виды, объединяя в один вид тех, которые скрещиваются. (Конечно, речь идёт о популяциях, а не об отдельных особях.) Возможность такого деления предполагает, что это отношение транзитивно. Однако так бывает не всегда. Рассказывают (см., например, статью про Ring species в википедии; русский вариант называется «Кольцевые виды»), что когда птицы живут вокруг некоторого препятствия (скажем, пустыни), может оказаться так, что они образуют незамкнутое кольцо: всюду, кроме точки разрыва, соседи скрещиваются, но встречающиеся с разных сторон точки разрыва птицы уже не скрещиваются, хотя живут рядом. Русская статья пишет, что «такие примеры, обладающие промежуточными характеристиками между видом и более низкими таксономическими рангами, противоречат классическому представлению о дискретности видов», а английская статья не стесняется назвать вещи своими именами: «the issue is that interfertility (ability to interbreed) is not a transitive relation — if A can breed with B, and B can breed with C, it does not follow that A can breed with C — and thus does not define an equivalence relation. A ring species is a species that exhibits a counterexample to transitivity» (R. Brown, “Same species” vs. “Interfertile”: concise wording can avoid confusion when discussing evolution).

В математике отношение эквивалентности используется очень часто, например, при формальном определении рациональных чисел. Допустим, мы уже определили целые числа. Рассмотрим дроби, то есть упорядоченные пары (m, n) , где m и n — целые числа и $n > 0$. Первый элемент пары будем называть числителем, второй — знаменателем, и записывать пару для наглядности как $\frac{m}{n}$ (не придавая пока разделяющей черте никакого смысла — просто решили так записывать пару, и всё). Определим отношение на множестве пар, считая, что $\frac{m}{n}$ находится в этом отношении с $\frac{u}{v}$, если произведения mv и nu равны. (Хочется сказать: если частные m/n и u/v равны, но мы пока не определили рациональных чисел и частного.) Обозначение для этого отношения: $\frac{m}{n} \sim \frac{u}{v}$.

Проверим, что это отношение эквивалентности. В самом деле, $\frac{m}{n} \sim \frac{m}{n}$ (рефлексивность), потому что $mn = nm$. Симметричность тоже сразу следует из определения. А вот транзитивность немного сложнее: если $\frac{m}{n} \sim \frac{u}{v}$ и $\frac{u}{v} \sim \frac{k}{l}$, то по определению $mv = nu$ и $ul = vk$. Домножая равенства на l и n и применяя транзитивность для обычного равенства чисел, получаем $mv l = nul = nvk$. Теперь надо воспользоваться таким свойством целых чисел: на ненулевое число (в нашем случае v) можно сокращать. Получится $ml = nk$, то есть $\frac{m}{n} \sim \frac{k}{l}$. Транзитивность проверена.

Имея отношение эквивалентности, можно рассмотреть соответствующие классы

эквивалентности и назвать их рациональными числами. Класс дроби $\frac{m}{n}$ после этого можно назвать рациональным числом, получающимся при делении m на n . Например при делении 2 на 3 и при делении 4 на 6 получается одно и то же рациональное число, множество всех пар $\frac{m}{n}$, где $2n = 3m$ (или $4n = 6m$, это то же самое).

После этого надо аккуратно определять арифметические операции над рациональными числами и доказывать их свойства. Скажем, чтобы сложить два рациональных числа, нужно выбрать их представители, скажем, $\frac{m}{n}$ и $\frac{u}{v}$, и рассмотреть рациональное число (класс эквивалентности), содержащий $\frac{mv+nu}{nv}$.

Задача 8.4. Проверьте, что это определение корректно, то есть что получившийся класс (сумма) не зависит от того, какие именно представители выбраны в двух классах-слагаемых.

Решение. Нужно проверить следующее утверждение:

$$\text{если } \frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \text{ и } \frac{u}{v} \sim \frac{u'}{v'}, \text{ то } \frac{mv+nu}{nv} \sim \frac{m'v'+n'u'}{n'v'}.$$

Если раскрыть определение эквивалентности в этом утверждении, получим такое (равносильное исходному) утверждение о целых числах:

$$\text{если } mn' = m'n \text{ и } uv' = u'v, \text{ то } (n'v')(mv+nu) = (nv)(m'v'+n'u').$$

Выглядит сложно, а проверяется в одну строчку:

$$(n'v')(mv+nu) = n'mv'v + uv'n'n = m'nv'v + u'vn'n = (nv)(m'v'+n'u')$$

(в преобразованиях мы использовали равенства, которые входят в посылку утверждения). \square

У нас уже встречались примеры отношений эквивалентности: отношение достижимости на неориентированном графе (раздел ??) и отношение эквивалентности на целых числах « a имеет тот же остаток, что и b при делении на N ». Классы эквивалентности последнего отношения называются *вычетами по модулю N* . В лекции 4 мы фактически определили арифметические операции на множестве вычетов. По сути это аналогично построению рациональных чисел, намеченному выше в этом разделе.

8.6 Композиция отношений

Все знают, что тёща — это мать жены, но не все знают, как это научно сформулировать. С точки зрения математика, тут есть два отношения

$$W(x, y) = \langle y - \text{жена } x \rangle$$

и

$$M(y, z) = \langle z - \text{мать } y \rangle$$

А. Шень и др.

Лекции по дискретной математике (черновик от 6 октября 2015 г.)

и мы применяем к ним операцию, называемую *композицией*.

Формальное определение композиции выглядит так. Пусть даны два отношения $R \subset A \times B$ и $S \subset B \times C$. Их *композицией* называется отношение $S \circ R \subseteq A \times C$, определяемое так:

$$(x, z) \in S \circ R \Leftrightarrow \text{существует такой } y \in B, \text{ что } (x, y) \in R \text{ и } (y, z) \in S.$$

В нашем примере A, B, C — это одно и то же множество, а именно, множество всех людей, $M \circ W(x, z)$ как раз и означает, что z — теща x : определение композиции в данном случае читается как

$$\text{существует такой } y, \text{ что } W(x, y) \text{ и } M(y, z),$$

то есть что найдётся такой человек y , что y — жена x и z — мать y . Заметим ещё, что это определение вполне имеет смысл и в странах, где разрешено иметь много жён — тогда у одного человека может быть и много тещ.

Еще один многим знакомый пример возникает в социальных сетях, где есть понятие «друзья друзей». Это ни что иное, как композиция отношения «быть другом в данной социальной сети» с самим собой.

Обратите внимание, что композиция двух отношений может быть определена только в том случае, когда у них общее множество B . Если вас спросят на экзамене, чему равна композиция отношения $R(x, y)$, означающего, что человек y — отец человека x , и отношения $S(y, z)$, означающего, что число z на единицу больше числа y , то это скорее всего «проверка на вшивость» — если экзаменуемый начинает что-то вычислять, то на этом экзамен можно заканчивать. (Хороший студент в этот момент смотрит на экзаменатора как на идиота, и удовлетворённый экзаменатор переходит к следующему вопросу.)

Можно рассмотреть и более научный пример. Пусть A, B, C равны множеству действительных чисел, $R(x, y)$ означает, что $y = x^2$, а $S(y, z)$ означает, что $z = y + 1$. Тогда $S \circ R(x, z)$ означает, что найдётся y , для которого $y = x^2$ и $z = y + 1$, то есть что $z = x^2 + 1$.

Заметим, что для обозначения переменных можно использовать любые буквы: можно было бы сказать, например, что $R(y, z)$ означает, что $z = y^2$, а $S(x, y)$ означает, что $y = x + 1$. Это бы означало ровно то же самое: что R есть множество всех пар, в которых второе число равно квадрату первого, а S есть множество всех пар, в которых второе число на единицу больше первого. Но в таких обозначениях проще вычислить композицию в другом порядке $R \circ S$: она состоит из пар (x, z) , для которых

$$\exists y(y = x + 1) \wedge (z = y^2).$$

Мы использовали здесь стандартное обозначение \wedge для «и», а также «квантор существования» $\exists y$ вместо слов «существует y ». Так или иначе, это означает, что $z = (x + 1)^2$. Видно, что композиция может зависеть от порядка, даже если и в том, и в другом порядке она имеет смысл. Что, впрочем, и по жизни ясно: отец брата — совсем не то же, что брат отца.

Контрольный вопрос 8.4. Проверьте, что композиция графиков функций как отношений совпадает с графиком композиции этих функций.

Задача 8.5. Закончить предложение: отношение R на множестве A транзитивно тогда и только тогда, когда композиция $R \circ R \dots$

Решение. Ответ: \dots является подмножеством отношения R .

Транзитивность R означает, что из $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ следует $(x, z) \in R$. Если пара (a, b) принадлежит $R \circ R$, это означает по определению композиции, что для некоторого $y \in A$ обе пары (a, y) и (y, b) принадлежат R . По транзитивности получаем, что $(a, b) \in R$. То есть, любой элемент $R \circ R$ является элементом R .

Пусть $R \circ R \subseteq R$. Возьмём две пары (x, y) и (y, z) из отношения R . По определению композиции $(x, z) \in R \circ R$, а поскольку квадрат отношения лежит в нём самом, то $(x, z) \in R$. Это и означает транзитивность. \square

Задача 8.6. Рассмотрим на множестве действительных чисел \mathbb{R} бинарное отношение $R(x, y)$, означающее, что $xy > 0$. Чему равно $R \circ R$?

Решение. Нужно описать все такие пары (x, y) , что для некоторого числа z выполняются два строгих неравенства

$$xz > 0, \quad zy > 0.$$

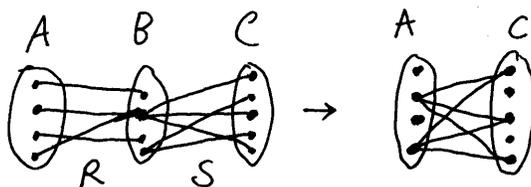
Ясно, что числа не равны 0. Поэтому из этих двух неравенств следует, что $x/y > 0$, откуда $xy = (x/y) \cdot y^2 > 0$.

С другой стороны, если $xy > 0$, то либо $x \cdot 1 > 0$ и $y \cdot 1 > 0$, либо $x \cdot (-1) > 0$ и $y \cdot (-1) > 0$. Значит, $(x, y) \in R \circ R$.

Ответ: $R \circ R = R$. \square

По существу та же операция композиции встречается в реляционных базах данных под названием операции JOIN, применяемой к двум отношениям. Разница в обозначениях: там, говоря об отношениях, говорят не о первом или втором члене пары, а дают этим членам имена. Скажем, можно рассматривать отношение ПРОЖИВАТЬ между множеством людей и множеством помещений, и говорить, что оно имеет атрибуты ЖИЛЕЦ и ЖИЛЬЁ, а также отношение НАХОДИТЬСЯ между множеством помещений и множеством улиц, имеющее атрибуты ЖИЛЬЁ и УЛИЦА. Применяя операцию JOIN по атрибуту ЖИЛЬЁ, мы получаем отношение ПРОЖИВАТЬ-НАУЛИЦЕ с атрибутами ЖИЛЕЦ и УЛИЦА (между множеством людей и множеством улиц). Ясно, что это та же самая композиция отношений, но в других обозначениях.

Можно описать операцию композиции и в терминах графов. Представим два отношения $R \subset A \times B$ и $S \subset B \times C$ в виде двудольных графов с общей долей B (правой долей для R и левой долей для S). Тогда их композиция будет двудольным графом с левой долей A и правой долей C : ребро $a-c$ в таком графе означает, что найдётся b , для которого a соединено с b ребром, и b соединено с c ребром, то есть что из a в c можно пройти за два шага:



Для знакомых с линейной алгеброй композицию отношений можно описать ещё одним способом. Будем изображать отношение матрицей, как мы делали, только вместо плюсов будем писать положительные числа, а вместо пустых клеток — нули. Тогда композиция отношений будет изображаться произведением матриц. Понятно, почему?

Композиция отношений, как и функций, обладает свойством *ассоциативности*

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

Здесь мы предполагаем, что множества, для которых определены отношения, выбраны согласованно, то есть $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$ и $T \subset C \times D$ (иначе композиции нельзя определить).

Это проще понять, чем объяснить: обе части равенства задают отношение M , для которого $M(a, d)$ равносильно тому, что найдутся такие $b \in B$ и $c \in C$, что одновременно $R(a, b)$, $S(b, c)$ и $T(c, d)$:

$$M(a, d) \Leftrightarrow (\exists b \in B)(\exists c \in C)[R(a, b) \wedge S(b, c) \wedge T(c, d)].$$

(Композиция заменяет два шага по рёбрам графов на один; теперь у нас три графа, и всё равно, в каком порядке их склеивать.)

8.7 Отношения: что дальше?

В этой лекции, как и в нескольких предыдущих, почти не было интересных теорем, речь больше шла об определениях, соглашениях, обозначениях и т. д. Цель наша в том, чтобы привыкнуть к некоторому языку (множества, отношения, функции, композиция, ...) — и для этого поговорить на этом языке о чём-то сравнительно простом и знакомом. (Никто не ждёт откровений от диалогов в учебнике английского языка.)

Этот язык будет нам постоянно встречаться — будем ли мы говорить о логических операциях и кванторах, или о графах, или об упорядоченных множествах, или о вычислимых функциях и перечислимых свойствах. Да и не только нам — пытаясь уточнить смысл понятия падежа, Колмогоров и Зализняк предлагали считать падежом класс эквивалентности некоторого отношения.¹ Умение увидеть какие-то из

¹И при этом в русском языке обнаруживается больше падежей, чем традиционные шесть — именительный, родительный, дательный, винительный, творительный и предложный. Скажем, в обороте «в лесу» этот самый «лес» считают стоящим в «местном» падеже. См. подробности в http://www.kolmogorov.info/uspensky-k_opredeleniyu_padezha_po_kolmogorovu.html

рассмотренных нами структур часто бывает полезно, даже если на первый взгляд ничего подобного не скажешь. Например, есть такая задача, которую может понять даже семиклассник: в десятизначном числе, составленном из разных цифр, можно вычеркнуть шесть цифр, чтобы оставшиеся четыре шли в возрастающем или в убывающем порядке. Однако (по-видимому, самое простое) её решение состоит в том, что на множестве цифр рассматривается подходящее бинарное отношение порядка («стоять левее и одновременно быть меньше» — мы разберём этот пример в лекции 10 об упорядоченных множествах).

8.8 Задачи для самостоятельного решения

7. Будем говорить, что одна прямоугольная коробка «меньше» другой, если одно из трёх измерений первой коробки меньше одного из трёх измерений второй (если их можно поставить на пол так, чтобы первая коробка была ниже второй). Будет ли это отношение транзитивным?

8. В ходе турнира каждая команда сыграла с каждой по одному разу, причём ничьих не было и каждая команда хоть кому-то да проиграла. Докажите, что найдутся три команды A , B , C , нарушившие транзитивность: A выиграла у B , B выиграла у C , а C выиграла у A .

9. Педанты заметят, что в предыдущей задаче мы неявно предполагаем, что в турнире участвовало конечное число команд. Почему это предположение существенно?

10. На плоскости нарисовано некоторое количество равносторонних треугольников. Они не пересекаются, но могут иметь общие участки сторон. Мы хотим покрасить каждый треугольник в какой-нибудь цвет так, чтобы те из них, которые соприкасаются, были покрашены в разные цвета (треугольники, имеющие одну общую точку, могут быть покрашены в один цвет). Хватит ли для такой раскраски двух цветов?

а) Та же задача для n отмеченных точек.

11. а) Рассмотрим на множестве \mathbb{R} бинарное отношение $R(x, y)$, означающее, что $y = x + 1$. Чему равно $R \circ R$?

б) Тот же вопрос, если $R(x, y)$ означает $x + y = 1$.

с) Тот же вопрос, если $R(x, y)$ означает $xy = 1$.

д) Тот же вопрос, если $R(x, y)$ означает $xy > 1$.

12. Является ли композиция отношений эквивалентности отношением эквивалентности?

13*. Докажите, что всякое отношение $R \subseteq A \times B$ на конечных множествах является композицией $U \circ f_R$ некоторой функции f_R , зависящей от R , и отношения U , которое зависит только от множеств A и B .

14. Пусть A состоит из m элементов, а B состоит из n элементов. Сколько всего бывает отношений $R \subseteq A \times B$?