Программа коллоквиума по дискретной математике (основной поток)

В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет три вопроса: вопрос на знание определений, задача, вопрос на знание доказательств. На подготовку ответа у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаете устно одному из преподавателей.

Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Вы получаете свой первый балл как только приходите на коллоквиум, еще 2 балла — за полный ответ на вопрос на знание определений, 3 балла — за правильное решение задачи, ну и последние 4 балла — за полный ответ на вопрос на знание доказательств.

По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.

1. Вопросы на знание определений

1. Функции, определение с помощью графика функции. Образы и прообразы множеств.
2. Виды функций: инъекции, сюръекции и биекции.
3. Композиция функций, ее свойства.
4. Обратная функция, ее свойства.
5. Основные определения элементарной теории вероятностей: исходы, события, вероятность события.
6. Условная вероятность.
7. Независимые события. Основные свойства независимых событий.
8. Случайная величина.
9. Математическое ожидание случайной величины.
10. Определение схемы в некотором функциональном базисе. Представление схем графами.
11. Определение полного базиса. Примеры полных и неполных базисов.
12. Определение схемной сложности функции.
13. Определение равномощных множеств. Основные свойства равномощности.
14. Определение бесконечного множества.
15. Определение счетного множества. Примеры.
16. Основные свойства счетных множеств.
17. Определение множества мощности континуум. Примеры.
18. Основные свойства континуальных множеств.
19. Основные свойства вычислимых функций.
20. Определение разрешимого множества.
21. Определение перечислимого множества.
22. Свойства перечислимых множеств.
23. Определение универсальной вычислимой функции.
24. Определение главной универсальной вычислимой функции.
25. Формулировка теоремы Успенского–Райса.
26. Формулировка теоремы о неподвижной точке.
27. Определение машины Тьюринга (с одной лентой и несколькими лентами).
28. Определение функции, вычислимой на машине Тьюринга.

2. Примерные задачи на понимание определений

На коллоквиуме Вам может попасться похожая по уровню задача не из этого списка.

1. Про множества A, B, C известно, что в каждом из множеств 11 элементов, а пересечение любых двух из этих множеств содержится в третьем. Может ли так случиться, что $A \cup B \cup C$ содержит 22 элемента?

2. Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ отображает число n в наибольший простой делитель числа n. Найдите полный прообраз $f^{-1}(E)$, где E — множество четных чисел.

3. Верно ли, что композиция сюръективного и инъективного отображений инъективна?

4. Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ отображает число n в наибольший простой делитель числа n. Функция $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ отображает число n в наименьший простой делитель числа n. Верно ли, что $g \circ f \circ g = f \circ g$?

5. Верно ли, что $f\colon A \to A$ биекция, тогда и только тогда, когда существует $g\colon A \to A$, такая что $f \circ g = \mathrm{id}_A$?

6. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «$x_1x_2x_3x_4$ чётно».

7. Приведите пример вероятностного пространства и таких событий A, B в этом пространстве, что $\Pr[A \mid B] = \frac{1}{3}\Pr[A]$.

8. Существуют ли такие события A и B, что $\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[A \mid B] = 1/2$, а $\Pr[B \mid A] = 1/3$?

9. О событиях A и B вероятностного пространства U известно, что $\Pr[A] = \Pr[B] = 4/5$. Могут ли при этом события $A \cup B$ и B быть независимыми?

10. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите математическое ожидание случайной величины $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

11. Докажите полноту базиса, состоящего из функций $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, x_1x_2, 1.

12. Рассматриваем схемы в стандартном базисе. Пусть схемная сложность функции f не больше A, а схемная сложность функции g не больше B. Докажите, что схемная сложность функции $f \oplus g$ не больше $A + B + 5$.

13. Докажите, что множество непересекающихся отрезков на прямой конечно или счетно.

14. Докажите, что биекций на множестве натуральных чисел континуум.

15. Постройте вычислимую биекцию между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \setminus \{p^2 \mid p \in \mathbb{N}\}$.

16. Пусть A — разрешимое множество, а B — перечислимое. Верно ли, что $B \setminus A$ — перечислимое?

17. Пусть U – универсальная. Положим $V(n, x) = U(n - 1, x)$, если $n > 0$, и $V(n, x) = 0$ иначе. Будет ли V универсальной?

18. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдется бесконечно много таких p, что $U(p, x) = x$ для любого x.

19. Приведите пример машины Тьюринга, вычисляющей нигде неопределенную функцию.

3. Вопрос на знание доказательств

1. Доказательство формулы включений и исключений.
2. Критерий существования функции, обратной к данной.
3. Количество функций из n-элементного множества в k-элементное.
4. Количество всюду определенных функций из n-элементного множества в k-элементное.
5. Количество инъективных отображений n-элементного множества в k-элементное.
6. Количество сюръективных отображений n-элементного множества в k-элементное.
7. Формулировка и доказательство формулы включений и исключений для вероятностей.
8. Формула Байеса.
9. Формула полной вероятности.
10. Линейность математического ожидания случайных величин.
11. Формулировка и доказательство неравенства Маркова.
12. Полнота стандартного базиса.
13. Существование булевых функций от n переменных схемной сложности $\Omega(2^n/n)$.
14. Верхняя оценка $O(n2^n)$ схемной сложности булевой функции от n переменных.
15. Схема сложения n-битовых чисел сложности $O(n)$.
16. Схема умножения n-битовых чисел сложности $O(n^2)$.
17. Схема проверки связности графа на n вершинах полиномиального размера.
18. Подмножество счетного множества конечно или счетно.
19. Любое бесонечное множество содержит счетное подмножество.
20. Счетное объединение конечных или счетных множеств конечно или счетно.
21. Счетность декартова произведения счетных множеств.
22. Счетность иножества слов в конечном или счетном непустом алфавите.
23. Несчетность множества мощности континуум.
24. Теорема Кантора–Бернштейна: формулировка и доказательство.
25. Теорема Поста: формулировка и доказательство.
26. Разрешимые множества перечислимы.
27. Перечислимые множества являются множествами значений вычислимых функций.
28. Перечислимые множества являются множествами значений всюду определенных вычислимых функций.
29. Множества значений всюду определенных функций перечислимы.

30. Множество значений всюду определенной вычислимой функции является областью определения вычислимой функции.

31. Область определения вычислимой функции является множеством значений вычислимой функции.

32. Непустое множество значений вычислимой функции является множеством значений всюду определенной вычислимой функции.

33. Пример перечислимого неразрешимого множества.

34. Невозможность универсальной нумерации всюду определенных вычислимых функций: формулировка и доказательство.

35. Функция вычислима тогда и только тогда, когда ее график перечислим.

36. Перечислимые множества — это в точности проекции разрешимых.

37. Пример вычислимой функции без всюду определенного вычислимого продолжения.

38. Доказательство теоремы Успенского–Райса.

39. Доказательство теоремы о неподвижной точке.

40. Композиция функций, вычислимых на машине Тьюринга, вычислима на машине Тьюринга.