

Программа коллоквиума по дискретной математике (основной поток)

В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет три вопроса: вопрос на знание определений, задача, вопрос на знание доказательств. На подготовку ответа у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаете устно одному из преподавателей.

Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Вы получаете свой первый балл как только приходите на коллоквиум, еще 2 балла — за полный ответ на вопрос на знание определений, 3 балла — за правильное решение задачи, ну и последние 4 балла — за полный ответ на вопрос на знание доказательств.

По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.

1. Вопросы на знание определений

1. Принцип математической индукции.
2. Формулы суммы и произведения. Задачи о подсчете путей.
3. Конечные слова в алфавите. Двоичные слова, подмножества конечного множества, индикаторные (характеристические) функции.
4. Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение.
5. Биномиальные коэффициенты, основные свойства. Бином Ньютона.
6. Перестановки, формулы для количества перестановок.
7. Числа Фибоначчи: определение, примеры перечислительных задач, в которых ответ выражается через числа Фибоначчи.
8. Графы. Основные определения: ребра, вершины, степени вершин.
9. Пути и циклы в графах, основные свойства.
10. Отношение связности и компоненты связности графа.
11. Деревья. Примеры и свойства.
12. Полные бинарные деревья.
13. Правильные раскраски графов. Формулировка критерия 2-раскрашиваемости.
14. Ориентированные графы, основные определения.
15. Компоненты сильной связности ориентированного графа.
16. Ациклические ориентированные графы.
17. Эйлеровы циклы.
18. Делимость целых чисел, основные свойства.
19. Деление целых чисел с остатком.
20. Сравнения по модулю. Основные свойства.
21. Арифметика остатков (вычетов). Обратимые остатки (вычеты).
22. Малая теорема Ферма.
23. Теорема Эйлера.
24. Линейные диофантовы уравнения.
25. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя.
26. Расширенный алгоритм Евклида нахождения решения линейного диофантова уравнения.
27. Простые числа, формулировка основной теоремы арифметики.
28. Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное: основные свойства.
29. Множества, теоретико-множественные операции, их свойства.

30. Логические значения и логические связки. Задание булевых функций таблицами истинности.
31. Примеры тождеств с булевыми функциями.
32. ДНФ.
33. Функции, определение с помощью графика функции. Образы и прообразы множеств.
34. Виды функций: инъекции, сюръекции и биекции.

2. Примерные задачи на понимание определений

На коллоквиуме Вам может попасться похожая по уровню задача не из этого списка.

1. Остается ли принцип математической индукции верным, если из него убрать базу? Если да, то докажите его, если нет, приведите пример.

2. Найдите сумму геометрической прогрессии

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

3. Найдите количество перестановок n элементов.

4. Найдите количество последовательностей длины k , которые состоят из различных элементов n -элементного множества.

5. Под числом A в треугольнике Паскаля стоит число B . Может ли так случиться, что $10A < B$? (Напомним, что соседние строки в треугольнике Паскаля сдвинуты так, что число в нижней строке стоит между числами в верхней строке. Поэтому строка, в которой стоит B , находится через одну от строки, в которой стоит A .)

6. Сколько есть двоичных слов длины n , содержащих k единиц?

7. Сколько есть путей по целым точкам прямой, которые начинаются в 0 ; заканчиваются в n ; каждый шаг направлен вправо и имеет целую положительную длину?

8. Сколько есть путей, состоящих из k шагов, которые идут по целым точкам прямой, которые начинаются в 0 ; заканчиваются в n ; каждый шаг направлен вправо и имеет целую положительную длину?

9. Есть ли такой неориентированный связный граф на 20 вершинах с 28 ребрами, в котором есть 6 вершин, попарно соединенных ребром?

10. Верно ли, что между любыми двумя вершинами неориентированного связного графа есть простой путь?

11. Постройте дерево диаметра 8, в котором степени всех вершин не больше 3, а всего вершин 31. (Диаметр — длина наибольшего простого пути.)

12. Постройте пример неориентированного графа, который нельзя правильно раскрасить в k цветов.

13. Приведите пример дерева на 2015 вершинах, к которому нельзя добавить ребро так, чтобы получился 2-раскрашиваемый граф.

14. В ориентированном графе на 16 вершинах исходящие и входящие степени вершин равны 1. Сколько ребер в этом графе?

15. Приведите пример ациклического ориентированного графа, к которому нельзя добавить ребро так, чтобы граф остался ациклическим.

16. Для каких n в булевом кубе размерности n есть эйлеров цикл? Для всякого такого n постройте эйлеров цикл.

17. Приведите пример таких целых чисел a, b, c , что $\text{НОД}(ab, c) \neq \text{НОД}(a, c) \cdot \text{НОД}(b, c)$.

18. На сколько нулей заканчивается число $16!$?

19. Найдите остаток от деления 2^{38} на 37.

20. Решите диофантово уравнение $12x + 19y = 7$.

21. Сколько есть положительных целых делителей у числа 6^6 ?

22. Приведите пример таких множеств A, B , для которых $A \setminus B = B \setminus A$.

23. Существует ли такое множество A , что для любого множества X выполняется $A \times X = A$?

24. Функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ отображает число n в наибольший простой делитель числа n . Найдите полный прообраз $f^{-1}(E)$, где E — множество четных чисел.

3. Вопрос на знание доказательств

1. Формула для количества слов длины n : доказательство по индукции.
2. Бином Ньютона. Формула для биномиальных коэффициентов.
3. Количество решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ в неотрицательных целых числах. (Метод точек и перегородок.)
4. Основные свойства треугольника Паскаля: симметричность строк, возрастание чисел в первой половине строки, формула для суммы чисел в строке, формула для знакопеременной суммы чисел в строке.
5. Формулы для суммы степеней вершин в неориентированном и в ориентированном графе.
6. Нижняя оценка числа связных компонент в неориентированном графе.
7. Доказательство критерия 2-раскрашиваемости неориентированного графа.
8. Доказательство совпадения деревьев и минимально связных графов.
9. Деревья — это в точности минимально связные графы.
10. Деревья — это в точности связные графы с $n - 1$ ребром.
11. Деревья — это в точности графы, в которых для любых двух вершин есть ровно один простой путь с концами в этих вершинах.
12. Существование висячих вершин в дереве.
13. Из любого связного неориентированного графа можно получить дерево удалением части ребер.
14. Равносильность двух свойств ориентированных графов: (1) каждая компонента сильной связности состоит из одной вершины; (2) вершины графа возможно занумеровать так, чтобы каждое ребро вело из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером.
15. Равносильность двух свойств ориентированных графов: (1) каждая компонента сильной связности состоит из одной вершины; (3) в графе нет циклов длины больше 1.
16. Равносильность двух свойств ориентированных графов: (2) вершины графа возможно занумеровать так, чтобы каждое ребро вело из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером; (3) в графе нет циклов длины больше 1.
17. Критерий существования эйлерова цикла в графе. (Ориентированный и неориентированный случаи.)
18. Сравнение $ax \equiv 1 \pmod{N}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(a, N) = 1$.
19. Признаки делимости на 3 и 9.
20. Признак делимости на 11.
21. Малая теорема Ферма.
22. Теорема Эйлера.
23. Теорема о разрешимости линейного диофантова уравнения, формула для решений.
24. Корректность алгоритма Евклида и расширенного алгоритма Евклида.

25. Основная теорема арифметики.
26. Китайская теорема об остатках.
27. Любая булева функция представляется в виде ДНФ.
28. Биекции между двоичными словами, подмножествами конечного множества и индикаторными (характеристическими) функциями.