Программа коллоквиума по дискретной математике на пилотном потоке

В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет три вопроса: вопрос на знание определений, задача, вопрос на знание доказательств. На подготовку ответа у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаете устно одному из преподавателей.

Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Вы получаете свой первый балл как только приходите на коллоквиум, еще 2 балла — за полный ответ на вопрос на знание определений, 3 балла — за правильное решение задачи, ну и последние 4 балла — за полный ответ на вопрос на знание доказательств.

По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.

1 Вопросы на знание определений

1. Полное двоичное дерево, его свойства.
2. Двудольные графы. Булев куб.
3. Основные понятия теории вероятностей. Вероятностное пространство, события. Несовместные события.
4. Связь между теорией вероятностей и перечислительной комбинаторикой.
5. Условные вероятности, независимые события. Примеры.
6. Случайная величина. Математическое ожидание случайной величины, его свойства.
7. Комбинаторные игры. Примеры.
8. Стратегии. Выигрышные стратегии.
9. Разрешающие деревья. Примеры.
10. Адаптивные и неадаптивные алгоритмы в модели разрешающих деревьев.
11. Булевы схемы. Представление схем графами. Примеры.
12. Определение схемной сложности булевой функции.
13. Вычислимые функции. Разрешимые и перечислимые множества.
14. Вычислимая биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
15. Определение универсальной вычислимой функции. Неформальное обоснование существования.
16. Определение главной универсальной вычислимой функции.
17. Понятия m-сводимости и m-полноты.
18. Определение машины Тьюринга (с одной лентой и несколькими лентами).
19. Определение функции, вычислимой на машине Тьюринга. Тезис Черча-Тьюринга.

2 Примерные задачи на понимание определений

На коллоквиуме Вам может попасться похожая по уровню задача не из этого списка.

1. Для каких n в булевом кубе размерности n есть эйлеров цикл? Для всякого такого n постройте эйлеров цикл.

2. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «$x_1x_2x_3x_4$ чётно».

3. Приведите пример вероятностного пространства и таких событий A, B в этом пространстве, что $\Pr[A \mid B] = \frac{1}{3}\Pr[A]$.

4. Существуют ли такие события A и B, что $\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[A \mid B] = 1/2$, а $\Pr[B \mid A] = 1/3$?

5. О событиях A и B вероятностного пространства U известно, что $\Pr[A] = \Pr[B] = 4/5$. Могут ли при этом события $A \cup B$ и B быть независимыми?

6. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите математическое ожидание случайной величины $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

7. На столе лежит две кучи камней, в одной 4, в другой – 6. За один ход игроку разрешается взять из одной кучи 2 или 3 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Перечислите все выигрышные позиции первого игрока.

8. Рассмотрим булеву функцию $EQ(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, равную 1 тогда и только тогда, когда $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$. Два игрока по очереди выбирают значения одной из переменных функции. Первый игрок выигрывает, если после фиксации всех переменных функция оказывается равной 0. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

9. Какова сложность функции $x \wedge y \wedge z$ в модели разрешающих деревьев?

10. Дано n монет разного веса, за одно взвешивание разрешается сравнить по весу две монеты. Пусть после нескольких взвешивание мы можем однозначно указать вторую по тяжести монету. Можем ли мы при этом указать самую тяжелую монету?

11. Пусть булева функция $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Постройте булеву схему, вычисляющую функцию f.

12. Пусть схемная сложность функции f не больше A, а схемная сложность функции g не больше B. Докажите, что схемная сложность функции $f \oplus g$ не больше $A + B + 5$.

13. Пусть A — разрешимое множество, а B — перечислимое. Верно ли, что $B \setminus A$ — перечислимое?

14. Пусть $U(n, x)$ универсальная вычислимая функция. Положим $V(n, x) = U(n - 1, x)$, если $n > 0$, и $V(n, x) = 0$ иначе. Является ли $V(n, x)$ универсальной вычислимой функцией?

15. Пусть $U(n, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдется бесконечно много таких n, что $U(n, x) = x$ для любого x.

16. Верно ли, что если множества равномощны, то они m-сводятся друг к другу? Верно ли, что если множества m-сводятся друг к другу, то они равномощны?

17. К каким подмножествам натуральных чисел m-сводится пустое множество?

18. Постройте машину Тьюринга, вычисляющей нигде неопределенную функцию.

19. Постройте машину Тьюринга, вычисляющую функцию, равную 0 на всех входах.

3 Вопрос на знание доказательств

1. Двудольные графы — это в точности графы без циклов нечетной длины.
2. Лемма о степенях вершин в ориентированных графах. Понятие сильной связности. Компоненты сильной связности.
3. Критерий существования эйлерова цикла в графе.
4. Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.
5. Оценка вероятности объединения событий. Формула включений-исключений для вероятностей.
6. Задача о беспорядках.
7. Вероятностный метод. Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея.
8. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
9. Задача о днях рождения.
10. Неравенство Маркова.
11. Нижняя оценка на максимальное количество ребер в разрезе.
12. Асимптотика биномиального коэффициента $\binom{2n}{n}$. Верхняя и нижняя оценка произвольного биномиального коэффициента $\binom{n}{k}$.
13. Симметричные стратегии, примеры.
14. Теорема о существовании выигрышной стратегии в конечной ациклической игре.
15. Функция Шпрага-Ганди, сумма игр.
16. Задача об угадывании числа, адаптивная и неадаптивная модель. Верхняя и нижняя оценки.
17. Задача о сортировке, верхняя и нижняя оценка.
18. Задача о нахождении самой тяжелой монеты. Адаптивная и неадаптивная модель, верхние и нижние оценки.
19. Задача о связности графа в модели разрешающих деревьев. Верхняя и нижняя оценка.
20. Булевы схемы для сложения и умножения n-битовых чисел. Оценка размера.
21. Булева схема для задачи о связности графа. Оценка размера.
22. Верхняя оценка размера схемы для произвольной функции. Существование сложных функций.
23. Нижняя оценка размера схемы для функции XOR.

24. Простейшие свойства разрешимых и перечислимых множеств: замкнутость относительно теоретико-множественных операций.

25. Эквивалентные определения перечислимых множеств.

26. Теорема Поста.

27. Существование вычислимой функции без всюду определенного вычислимого продолжения. Существование перечислимого неразрешимого множества.

28. Существование главной универсальной функции.

29. Теорема Райса-Успенского.

30. Существование не главной универсальной функции.

31. Теорема о неподвижной точке. Существование программы, печатающий свой текст.

32. Простейшие свойства m-сводимости.

33. Примеры m-полных множеств.

34. Лемма об очистке мусора для машин Тьюринга. Вычислимость композиции вычислимых функций.

35. Связь одноленточных и многоленточных машин Тьюринга.

36. Описание универсальной машины Тьюринга.