

Программа коллоквиума по дискретной математике

В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет три вопроса: вопрос на знание определений, задача, вопрос на знание доказательств. На подготовку ответа у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаете устно одному из преподавателей.

Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Вы получаете свой первый балл как только приходите на коллоквиум, еще 2 балла — за полный ответ на вопрос на знание определений, 3 балла — за правильное решение задачи, ну и последние 4 балла — за полный ответ на вопрос на знание доказательств.

По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.

1 Вопросы на знание определений

1. Принцип математической индукции.
2. Формулы суммы и произведения. Задачи о подсчете путей.
3. Конечные слова в алфавите. Соответствие между двоичными словами, подмножествами множества и характеристическими функциями.
4. Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение.
5. Числа Фибоначчи: определение, примеры перечислительных задач, в которых ответ выражается через числа Фибоначчи.
6. Множества и логика
7. Множества, теоретико-множественные операции, их свойства.
8. Логические значения и логические связки. Задание булевых функций таблицами истинности.
9. Формула включений–исключений. Примеры использования.
10. Бинарные отношения.
11. Отношения эквивалентности. Классы эквивалентности.
12. Функции. Образы и прообразы множеств. Обратная функция.
13. Виды функций: инъекции, сюръекции и биекции.
14. Композиция отношений, ее свойства.
15. Определение частичного порядка. Примеры частичных порядков.
16. Изоморфизм порядков. Примеры.
17. Минимальные и максимальные элементы в частичных порядках. Наибольшие и наименьшие элементы.
18. Бесконечно убывающие цепи. Фундированные множества.
19. Принцип математической индукции для фундированных множеств.
20. Равномощные множества.
21. Счетные мощности. Свойства, примеры.
22. Множества мощности континуум. Свойства, примеры.

23. Графы. Основные определения.
24. Подграфы. Циклы и пути. Клики и независимые множества.
25. Отношение достижимости и компоненты связности графа.
26. Двудольные графы. Булев куб.
27. Деревья. Примеры и свойства.
28. Основные понятия теории вероятностей. Вероятностное пространство, события. Несовместные события.
29. Связь между теорией вероятностей и перечислительной комбинаторикой.
30. Вероятностные доказательства существования в комбинаторике. Оценка объединения.
31. Условные вероятности, независимые события.
32. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
33. Случайная величина. Математическое ожидание случайной величины, его свойства.

2 Примерные задачи на понимание определений

На коллоквиуме Вам может попасться похожая по уровню задача не из этого списка.

1. Остается ли принцип математической индукции (на натуральных числах) верным, если из него убрать базу? Если да, то докажите его, если нет, приведите пример.
2. Для каких n и h неравенство Бернулли обращается в равенство?
3. Сколько есть двоичных слов длины n , содержащих k единиц?
4. Существует ли такое множество A , что для любого множества X выполняется $A \times X = A$?
5. Полна ли система связей “конъюнкции” и “дизъюнкции”?
6. Верно ли, что $f: A \rightarrow A$ биекция, тогда и только тогда, когда существует $g: A \rightarrow A$, такая что $f \circ g = id_A$?
7. Верно ли, что композиция отношений частичного порядка является отношением частичного порядка?
8. Приведите пример частично упорядоченного множества, не являющегося линейно упорядоченным.
9. Приведите пример частично упорядоченного множества, не являющегося фундированным.
10. Докажите, что множество непересекающихся отрезков на прямой конечно или счетно.
11. Докажите, что число слов в конечном или счётном алфавите счётно.
12. Докажите, что отношений эквивалентности на множестве натуральных чисел континуум.
13. Докажите, что если в графе есть клика размера $k + 1$, то его нельзя правильно раскрасить в k цветов.
14. Для каких n в булевом кубе размерности n есть эйлеров цикл? Для всякого такого n постройте эйлеров цикл.
15. Есть ли такой связный граф на 20 вершинах с 30 ребрами, в котором есть клика размера 6?
16. Все функции из n -элементного множества в себя считаем равновозможными. Равны ли вероятности событий «функция не является инъекцией» и «у некоторого элемента нет прообраза»?
17. Приведите примеры, в которых условная вероятность $P_T[A | B]$ больше вероятности $Pr[A]$, меньше её, а также равна ей.
18. Пусть события A и B независимы, и вероятность события \bar{B} положительна. Докажите, что события A и \bar{B} независимы.

3 Вопрос на знание доказательств

1. Существование 2-цветной раскраски областей на плоскости.
2. Неравенство Бернулли.
3. Сумма обратных квадратов меньше 2.
4. Существование кодов Грея.
5. Число слов из n букв в алфавите размера k . Число списков длины k из n объектов без повторений.
6. Формула для числа k -элементных подмножеств в n -элементном множестве.
7. Бином Ньютона. Сумма биномиальных коэффициентов. Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов.
8. Количество решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ в неотрицательных целых числах.
9. Количество сюръективных отображений n -элементного множества в k -элементное.
10. Полнота системы связок «отрицание» и «конъюнкция».
11. Доказательство формулы включений–исключений для множеств.
12. Критерий существования функции, обратной к данной.
13. Доказательство неизоморфности порядков $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{N}$.
14. Доказательство эквивалентности трех определений фундированных множеств.
15. Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно.
16. Счетность множества конечных последовательностей натуральных чисел.
17. Если множество A бесконечно, а множество B конечно или счётно, то множество $A \cup B$ равно-мощно A .
18. Теорема Кантора – Бернштейна.
19. Равномощность отрезка и квадрата.
20. Несчетность множества бесконечных двоичных последовательностей.
21. Существование множеств, более мощных чем континуум.
22. Доказательство формулы для суммы степеней вершин в графе.
23. Доказать, что двудольные графы — это в точности графы без циклов нечетной длины. Как связаны двудольные графы и отношения?
24. Доказать, что достижимость в неориентированном графе является отношением эквивалентности и что всякий граф можно разбить на компоненты связности.
25. Доказательство совпадения деревьев и минимальных связных графов.
26. Доказать, что деревья — это связные графы без циклов.
27. Критерий существования эйлерова цикла в графе.
28. Доказательство формулы включений-исключений для вероятностей.
29. Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея.
30. Нижняя оценка на максимальное количество ребер в разрезе.