Перечислительная комбинаторика. Решения задач

ФКН ВШЭ, курс «Дискретная математика», основной поток

2015/16 уч. год

Задача 1.1. Есть 3 гвоздики, 4 розы и 5 тюльпанов.

a) Сколькими способами можно составить букет из цветов одного вида?

b) Сколькими способами из них можно составить букет, в котором нечётное количество цветов каждого вида?

c) Сколькими способами можно составить букет, используя любые из имеющихся цветов?

(Цветы одного сорта считаем одинаковыми, количество цветов в букете не ограничено, но не равно 0.)

Решение. **a)** Поскольку цветы одинаковые, количество вариантов составить букет из не более n цветов одного вида равно n (букет из 1 цветка, из двух, из трех, и так далее до n). Есть три вида цветов, поэтому общее количество вариантов равно $3 + 4 + 5 = 12$.

b) Чтобы однозначно задать букет, нужно для каждого вида цветов задать количество цветов этого вида в букете, причём это количество должно быть нечётным. Для гвоздик получаем 2 варианта, для роз — тоже 2, для тюльпанов — 3 варианта.

Общее количество букетов получается по правилу произведения: $2 \times 2 \times 3 = 12$.

c) Чтобы однозначно задать букет, нужно для каждого вида цветов задать количество цветов этого вида в букете. Это количество может равняться 0, но не для всех трёх видов одновременно.

Последнее замечание исключает ровно одну тройку чисел — $(0, 0, 0)$.

Если подсчитать тройки без учёта этого правила, получим $4 \times 5 \times 6 = 120$.

Ответ: $120 - 1 = 119$. □

Задача 1.2. Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить одну или обе координаты на 1. Сколько есть способов переместить Робота из точки $(0, 0)$ в точку $(2, 2)$?

Решение. Обозначим количество способов переместить Робота из точки $(0, 0)$ в точку (a, b) через $T(a, b)$. Правило суммы даёт такое рекуррентное соотношение:

$$T(a + 1, b + 1) = T(a + 1, b) + T(a, b) + T(a, b + 1).$$

Ясно также, что $T(a, 0) = T(0, b) = 1$.

Используя эти соотношения получаем

$$T(1,1) = T(1,0) + T(0,0) + T(0,1) = 3; \quad T(2,1) = T(2,0) + T(1,0) + T(1,1) = 5;$$
$$T(1,2) = T(1,1) + T(0,1) + T(0,2) = 5; \quad T(2,2) = T(2,1) + T(1,1) + T(1,2) = 13.$$

□

Задача 1.3. 4 человека должны унести 9 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый способен унести любое количество имеющихся предметов? (Люди между собой различаются.)

Решение. Занумеруем предметы числами от 1 до 9 и напишем на каждом имя того человека, который должен нести этот предмет. Получаем, что каждый вариант раскладки соответствует слову длины 9 в алфавите из 4 символов (символы — это имена людей).

Ответ: 4^9. □

Задача 1.4. Сколько есть 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

Решение. Всего 6-значных чисел $10^6 - 10^5 = 900\,000$ (поскольку 6-значное число задаётся словом длины 6 в алфавите из 10 символов, причём на первой позиции слова не стоит 0).

Слов, в которых все цифры нечётные $5^6 = 15\,625$, так как есть ровно 5 нечётных цифр. В остальных словах есть хотя бы одна чётная цифра.

Ответ: $900\,000 - 15\,625 = 884\,375$. □

Задача 1.5. Найдите количество последовательностей длины 4, состоящих из различных десятичных цифр.

Решение. На первом месте может стоять любая из 10 цифр, на втором — любая из цифр, отличающихся от первой (всего таких цифр 9), на третьем — любая из цифр, отличающихся от первых двух (всего таких цифр 8), на четвёртом — любая из цифр, отличающихся от первых трёх (всего таких цифр 7).

Ответ: $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$. □

Задача 1.6. Докажите, что количество последовательностей длины n, состоящих из различных целых чисел, взятых из отрезка от 1 до n, равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Решение. В этой задаче проходит то же рассуждение, что и в предыдущей. Аккуратное доказательство проводится индукцией по n. Для разнообразия приведем решение, несколько отличающееся от решения предыдущей задачи.

База индукции $n = 1$ очевидна: возможна ровно одна такая последовательность (состоящая из одного числа 1), что равно $1!$.

Шаг индукции. Предположим, что мы доказали утверждение задачи для числа n. Получить последовательность длины $n+1$, состоящую из различных целых чисел, взятых из отрезка от 1 до $n + 1$, можно так: выбрать одну из $n!$ (предположение индукции) последовательностей, состоящую из различных целых чисел, взятых из отрезка от 1 до n, и вставить в неё число $n+1$. Сделать это можно $(n+1)$-м способом (поставить $n+1$ перед всеми членами выбранной последовательности, поставить после первого члена выбранной последовательности и т.д.)

Общее количество полученных таким способом последовательностей равно

$$(n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

По принципу математической индукции заключаем, что утверждение задачи верно для всех n. $\square$

Задача 1.9. Найдите количество двоичных слов длины n (последовательностей длины n, составленных из нулей и единиц), в которых нет двух нулей подряд.

Решение. Ответ: искомое число a_n равно числу Фибоначчи F_{n+2}.

Легко видеть, что $a_0 = 1 = F_2$ (пустое слово удовлетворяет условию), а $a_1 = 2 = F_3$ (оба слова длины 1 годятся).

Поскольку числа Фибоначчи удовлетворяют рекуррентному соотношению $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, осталось проверить, что при всех $n \geqslant 2$ тому же рекуррентному соотношению удовлетворяют числа a_n.

Разобьём все слова без двух нулей подряд длины n на две группы: заканчивающиеся на 1 и заканчивающиеся на 10. Других слов указанного вида нет — если последняя цифра 0, то предыдущая обязана быть 1.

В первом случае перед 1 может стоять любое слово без двух нулей подряд, его длина $n-1$, а всего таких слов a_{n-1}. Аналогично, во втором случае перед 10 может стоять любое из a_{n-2} слов без двух нулей подряд длины $n-2$. Отсюда получаем

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

что и требовалось. $\square$

Задача 2.1. Сколько существует четырёхзначных чисел, в которых цифры идут в убывающем порядке?

Решение. Если выбрать какие-нибудь четыре различные цифры из 10 возможных, их можно расположить в убывающем порядке единственным способом. И наоборот, любому четырехзначному числу с убывающими цифрами естественным образом соответствует единственный набор из его 4 цифр. Поэтому искомое количество равно количеству сочетаний из 10 по 4, то есть

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

Замечание. Подумайте, почему количество четырёхзначных чисел, в которых цифры идут в возрастающем порядке, равно 126. $\square$

Задача 2.2. Сколько существует слов длины 10 в алфавите $\{А, Б, В\}$, содержащих ровно 4 буквы А?

Решение. Слово, удовлетворяющее условию задачи, можно выбрать так: сначала укажем 4 позиции из 10, на которых стоит буква А ($\binom{10}{4} = 210$ вариантов), а затем на оставшиеся позиции поставим поочерёдно буквы слова длины 6 в алфавите $\{$Б, В$\}$ ($2^6 = 64$ вариантов).

Ответ: $210 \cdot 64 = 13,440$. □

Задача 2.3. Докажите, что $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n2^{n-1}$.

Решение. Посчитаем двумя способами количество слов длины n в алфавите $\{N, C, H\}$, содержащих ровно одну букву H. Для краткости будем называть такие слова «отрядами» длины n.

1й способ. Получаем отряд в два шага. На первом шаге выбираем одно из 2^{n-1} слов длины $n-1$ в алфавите $\{N, C\}$, на втором — ставим букву H на один из n промежутков между буквами выбранного слова (позиции перед всеми буквами и после всех букв также удобно называть промежутками). Получаем $n2^{n-1}$, т.е. правую часть доказываемого равенства.

2й способ. Получаем отряд в три шага. На первом шаге выбираем число j от 1 до n. На втором шаге выбираем одно из $\binom{n}{j}$ слов длины n в алфавите $\{N, \boxed{CH}\}$, содержащее j символов $\boxed{CH}$. На третьем шаге в этом слове выбираем один из символов $\boxed{CH}$ (j способов выбрать) и меняем его на H. Остальные символы $\boxed{CH}$ заменяем на C.

По формуле суммы количество отрядов равно

$$\sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}.$$

Эта сумма отличается от левой части доказываемого равенства на единственное слагаемое с $j = 0$, то есть на $0 \cdot \binom{n}{0} = 0$.

Итак, и левая, и правая части равенства равны количеству отрядов длины n. Значит, равенство верно. □

Задача 2.4. Докажите, что $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. (Желательно найти комбинаторное доказательство.)

Решение. Посчитаем двумя способами количество возрастающих последовательностей длины $k+1$, состоящих из целых чисел из промежутка от 1 до $n+1$.

1й способ. Это количество равно количеству двоичных слов длины $n+1$, в которых $k+1$ единица, то есть $\binom{n+1}{k+1}$. Действительно, последовательности $a_1 < a_2 < \dots < a_{k+1}$ указанного вида сопоставляем слово, в котором на позициях с номерами a_1, a_2, ..., a_{k+1} стоят единицы, а на остальных позициях стоят нули. Соответствие взаимно однозначное: позиции единиц в слове однозначно восстанавливают последовательность.

2й способ. Выберем последовательность указанного вида в два шага. На первом выбираем максимальный элемент последовательности, обозначим его $j+1$. На втором шаге выбираем остальные члены последовательности. Они принадлежат промежутку от 1 до j. Аналогично первому способу подсчёта убеждаемся, что вариантов выбрать младшие k членов последовательности ровно $\binom{j}{k}$ штук. Получаем левую часть равенства.

Итак, и левая, и правая части равенства равны количеству элементов в некотором множестве. Значит, равенство верно. □

Задача 2.5. Докажите, что $\sum\limits_{j=0}^{k} \binom{r}{j}\binom{s}{k-j} = \binom{r+s}{k}$.

Решение. Вспомним определение биномиальных коэффициентов:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Теперь раскроем скобки и приведём подобные в левой и правых частях очевидного равенства

$$(1+x)^{r+s} = (1+x)^r (1+x)^s.$$

В левой части получаем многочлен

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+s}{k} x^k.$$

Правая часть является произведением двух многочленов

$$\left(\sum_{\ell=0}^{r} \binom{r}{\ell} x^\ell\right) \times \left(\sum_{\ell=0}^{s} \binom{s}{\ell} x^\ell\right).$$

Каждое слагаемое k-й степени в произведении этих многочленов получается произведением слагаемого некоторой степени j из первого многочлена и слагаемого степени $k-j$ из второго многочлена. Поэтому правая часть представляется как многочлен

$$\sum_{k=0}^{r+s} x^k \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{r}{j}\binom{s}{k-j}\right).$$

Многочлены равны тогда и только тогда, когда все их коэффициенты равны. Отсюда и следуют равенства, указанные в условии задачи. □

Задача 2.6. Сколькими способами можно выбрать 6 чисел от 1 до 15, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

Решение. Шестёркам чисел от 1 до 15 взаимно однозначно соответствуют двоичные слова длины 15, в которых 6 единиц. Если числа в шестёрке различаются хотя бы на 2, в соответствующем слове между любыми двумя единицами стоит хотя бы один нуль.

Возьмём слово длины 10 в алфавите $\{0, \boxed{1}\}$, содержащее 6 символов $\boxed{1}$. Заменим первые 5 символов $\boxed{1}$ в этом слове на 10, а последний — на 1. Получим двоичное слово длины 15, в котором 6 единиц и нет двух единиц подряд. Обратное преобразование — слова длины 15 с 6 единицами, которые не идут подряд, в слово длины 10 в алфавите $\{0, \boxed{1}\}$, содержащее 6 символов $\boxed{1}$, — выполняется аналогично: нужно вычеркнуть первый нуль после каждой из единиц, кроме последней, после чего заменить 1 на $\boxed{1}$.

Таким образом, нужное нам число равно количеству слов длины 10 в алфавите $\{0, \boxed{1}\}$, содержащих 6 символов $\boxed{1}$, т.е. равно $\binom{10}{6} = 210$.

Ответ: 210. □

Задача 2.7. Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых конфет между 5 детьми так, чтобы каждому досталось хотя бы 2 конфеты?

Решение. Занумеруем детей числами от 1 до 5. Обозначим через c_i количество конфет, выдаваемое ребёнку с номером i. Тогда условия задачи записываются как

$$\sum_{i=1}^{5} c_i = 15, \qquad c_i \geqslant 2 \text{ для всех } i.$$

Введём новые переменные $x_i = c_i - 2$. В этих переменных условия записываются как

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 5, \qquad x_i \geqslant 0 \text{ для всех } i$$

(каждая из переменных x_i на 2 меньше соответствующей переменной c_i, поэтому сумма x-переменных на 10 меньше суммы c-переменных).

Напомним, что число решений уравнения

$$x_1 + \cdots + x_k = n$$

в неотрицательных целых числах равно $\dbinom{n+k-1}{n}$ («число сочетаний с повторениями»).

Ответ: $\dbinom{9}{5} = 126$. □

Задача 2.8. Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить абсциссу на 1 или ординату на любое положительное число. Сколько есть способов переместить Робота из точки $(0,0)$ в точку $(5,10)$?

Решение. Чтобы попасть в точку $(5, 10)$, Робот должен сделать 5 шагов вдоль оси абсцисс. Посчитаем количество способов движения Робота при условии, что тот сделал k шагов вверх. Общее количество шагов в этом случае равно $5 + k$.

Движение Робота однозначно задаётся указанием (1) тех k шагов из общего количества $5 + k$, которые направлены вверх; (2) длин шагов вверх $y_1, \ldots, y_k$.

Количество способов выбрать k шагов вверх из общего количества $5 + k$ равно $\binom{5+k}{k}$.

Количество способов выбрать длины шагов равно количеству положительных целочисленных решений уравнения

$$y_1 + \cdots + y_k = 10.$$

Применив рассуждение, аналогичное задаче 2.7, получим, что это количество равно количеству решений уравнения

$$x_1 + \cdots + x_k = 10 - k$$

в неотрицательных целых числах, то есть равно

$$\binom{10 - k + k - 1}{10 - k} = \binom{9}{10 - k}.$$

Число k лежит в промежутке от 1 до 10. Суммируя способы с разными значениями k, получаем ответ

$$\sum_{k=1}^{10} \binom{5 + k}{k} \binom{9}{10 - k} = 236\,640.$$

Ответ: 236 640. □