

1. Докажите, что для любого целого положительного  $n$  выполняется

а)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$  ;

б)  $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$  ;

в)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2} + 1$ .

2. Докажите, что 1 можно представить в виде суммы 2014 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.

3. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

а) заменять первую цифру (ноль на единицу и наоборот);

б) заменять цифру, стоящую после первой единицы.

Докажите, что после нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из 100 нулей и единиц.

4. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

5. Из целых чисел от 1 до  $2n$  выбрано  $n + 1$  число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

6. а) Докажите, что любой квадрат  $2^n \times 2^n$ , из которого вырезана угловая клетка, можно разрезать на уголки из трех клеток.

б) Докажите, что на уголки можно разрезать любой квадрат  $2^n \times 2^n$ , из которого вырезана любая (не обязательно угловая) клетка.

7\*. Целые положительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  таковы, что  $a_k \leq k$  и сумма всех этих чисел четна и равна  $2S$ . Докажите, что эти числа можно разбить на две группы, сумма по каждой из которых равна  $S$ .

8\*. Лабиринтом называется клетчатый квадрат  $10 \times 10$ , некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» — таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?