

Занятие 1. Формулы суммы, произведения. Индукция

1. Есть 3 гвоздики, 4 розы и 5 тюльпанов.
 - а) Сколькими способами можно составить букет из цветов одного вида?
 - б) Сколькими способами из них можно составить букет, в котором нечётное количество цветов каждого вида?
 - в) Сколькими способами можно составить букет, используя любые из имеющихся цветов?
(Цветы одного сорта считаем одинаковыми, количество цветов в букете не ограничено, но не равно 0.)
2. Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить одну или обе координаты на 1. Сколько есть способов переместить Робота из точки $(0, 0)$ в точку $(2, 2)$?
3. 4 человека должны унести 9 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый способен унести любое количество имеющихся предметов? (Люди между собой различаются.)
4. Сколько есть 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?
5. Найдите количество последовательностей длины 4, состоящих из различных десятичных цифр.
6. Докажите, что количество последовательностей длины n , состоящих из различных целых чисел, взятых из отрезка от 1 до n , равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.
7. Докажите, что для любого целого положительного n выполняется
 - а) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$;
 - б) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$.
8. Докажите, что 1 можно представить в виде суммы 2015 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.
9. Найдите количество двоичных слов длины n (последовательностей длины n , составленных из нулей и единиц), в которых нет двух нулей подряд.
10. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:
 - а) заменять первую цифру (ноль на единицу и наоборот);
 - б) заменять цифру, стоящую после первой единицы.

Докажите, что после нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из 100 нулей и единиц.

Домашнее задание 1

1. Кабинет Нумеролога открыт в январе по числам, в которые входит цифра 1, в феврале — по числам, в которые входит цифра 2, в марте — по числам, в которые входит цифра 3. Сколько рабочих дней будет у Нумеролога в первом квартале 2016 года?
2. Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить одну или обе координаты на 1. Сколько есть способов переместить Робота из точки $(0, 0)$ в точку $(3, 4)$?
3. В отделе работает 8 сотрудников. Каждый месяц ровно один из сотрудников получает премию. Сколькими способами можно составить годовой график выплаты премий?
4. Сколькими способами можно расставить в ряд 10 различных чисел так, чтобы наибольшее и наименьшее из них стояли рядом?
5. Сколькими способами колоду из 36 карт можно перетасовать так, чтобы красные и чёрные карты чередовались?
6. Докажите равенство $1 \cdot (n - 1) + 2 \cdot (n - 2) + \dots + (n - 1) \cdot 1 = \frac{(n - 1)n(n + 1)}{6}$.
7. Робот ходит по координатной прямой. На каждом шаге он может увеличить координату на любое нечётное число. Сколько есть способов переместить Робота из точки 0 в точку n ?
8. В зачёте участвовало несколько студентов и преподавателей. Известно, что в комнату, где происходил зачёт, каждый участник зачёта вошёл лишь однажды и что каждый преподаватель поговорил с каждым студентом. Докажите, что в какой-то момент зачёта в комнате присутствовали либо все студенты (и, может быть, кто-то из преподавателей), либо все преподаватели (и, может быть, кто-то из студентов).