Дискретная математика **Пилотный поток**

Занятие 1. Индукция

1. Докажите, что для любого целого положительного n выполняется

а) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$;

б) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$;

в) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2} + 1.$

2. Докажите, что 1 можно представить в виде суммы 2015 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.

3. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

а) заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);

б) заменять цифру, стоящую после первой единицы.

Докажите, что после нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из 100 нулей и единиц.

4. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

5. Из целых чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

6. а) Докажите, что любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана угловая клетка, можно разрезать на уголки из трех клеток.

б) Докажите, что на уголки можно разрезать любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана любая (не обязательно угловая) клетка.

7. Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10, некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» — таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?

8. На бесконечном клетчатом листе бумаги n клеток покрашены в черный цвет, остальные клетки белые. Каждый ход всякая клетка листа перекрашивается по следующему правилу. Для каждой клетки рассмотрим ее саму, соседнюю клетку сверху и соседнюю клетку справа. На следующем ходу клетка будет черной, если хотя бы две из этих трех клеток были черными на предыдущем ходу. Иначе клетка на следующем ходу будет белой.

а) Докажите, что рано или поздно весь лист станет белым.

б) Докажите, что это произойдет через не более чем n шагов.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 1

1. Докажите равенство

$$1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot 1 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

2. Докажите равенство

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

3. Докажите неравенство

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} > \frac{2}{3} \cdot n\sqrt{n}.$$

4. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

5. На кольцевой дороге стоит некоторое количество одинаковых автомобилей. Суммарное количество бензина в их бензобаках достаточно, чтобы один автомобиль мог совершить полный круг. Докажите, что найдется автомобиль, который, начав двигаться против часовой стрелки и забирая бензин по ходу движения у стоящих на дороге автомобилей, сможет совершить полный круг.

6. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трех цветов, по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

7. Целые положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_k \le k$ и сумма всех этих чисел четна и равна $2S$. Докажите, что эти числа можно разбить на две группы, сумма по каждой из которых равна S.

8. На табло есть несколько лампочек и несколько кнопок, некоторые лампочки горят. Нажатие кнопки меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что, для любого набора лампочек найдется кнопка, соединенная с нечетным числом лампочек из этого набора. Докажите, что нажимая на кнопки можно погасить все лампочки.