Дискретная математика **Основной поток**

Занятие 2. Сочетания, биномиальные коэффициенты

1. Сколько существует четырёхзначных чисел, в которых цифры идут в убывающем порядке?

2. Сколько существует слов длины 10 в алфавите $\{\text{А}, \text{Б}, \text{В}\}$, содержащих ровно 4 буквы А?

3. Докажите, что $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n2^{n-1}$.

4. Докажите, что $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. (Желательно найти комбинаторное доказательство.)

5. Докажите, что $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{r}{j}\binom{s}{k-j} = \binom{r+s}{k}$.

6. Сколькими способами можно выбрать 6 чисел от 1 до 15, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

7. Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых конфет между 5 детьми так, чтобы каждому досталось хотя бы 2 конфеты?

8. Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить абсциссу на 1 или ординату на любое положительное число. Сколько есть способов переместить Робота из точки $(0, 0)$ в точку $(5, 10)$?

9*. Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить одну или обе координаты на 1. Обозначим через $T(a, b)$ количество способов переместить Робота из точки $(0, 0)$ в точку (a, b). Докажите, что

$$T(a, b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{a}\binom{k}{b}.$$

Примечание. Частным случаем этой формулы является равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} = 6 = 2T(1, 1).$$

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 2

1. Есть 6 кандидатов на 6 вакансий. Сколькими способами можно заполнить вакансии? (Каждая вакансия должна быть заполнена.)

2. Преподаватель знает 7 задач по комбинаторике, 8 задач на индукцию и 9 задач по алгебре. Сколькими способами он может составить домашнее задание для студентов из 6 задач на одну тему?

3. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы чётные цифры шли в порядке возрастания, а нечётные — в порядке убывания?

4. 3 человека должны унести 9 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый готов взять 3 предмета?

5. Сколько существует 6-значных чисел, в которых чётных и нечётных цифр поровну?

6. Сколько имеется 7-значных чисел, у которых каждая следующая (слева направо) цифра не больше предыдущей?

7. Какое из чисел больше $\binom{F_{1000}}{F_{998}+1}$ или $\binom{F_{1000}}{F_{999}+1}$? Здесь F_n — n-е число Фибоначчи.

8. Приведите комбинаторное доказательство равенства

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant (n+1)/2} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}.$$