Занятие 2. Перечислительная комбинаторика

1. 4 человека должны унести 9 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый способен унести любое количество имеющихся предметов?

2. 4 человека должны взять по одному предмету из имеющихся 9 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать?

3. 2 человека должны унести 8 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый готов взять 4 предмета?

4. Сколько есть 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

5. Сколькими способами можно выстроить 8 человек в очередь так, чтобы Иванов, Петров и Сидоров стояли рядом?

6. Сколько имеется 4-значных чисел, у которых каждая следующая (слева направо) цифра больше предыдущей?

7. Сколькими способами можно образовать 6 пар из 12 человек?

8. Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по монете?

9. Сколькими способами можно выбрать 6 различных чисел от 1 до 15, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

10. Докажите равенства (предпочтительнее комбинаторное доказательство)

а) $\sum\limits_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{d+k}{d} = \binom{d+1+n}{d+1}$.

11. Докажите, что число последовательностей из нулей и единиц длины n, в которых не встречается двух нулей подряд равно n-ому *числу Фибоначчи* F_n, где $F_0 = F_1 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

12. Докажите, что количество способов разбить прямоугольник $n \times 2$ на прямоугольники размера 1×2 равно F_n.

13. *Разложением* числа n называется такая последовательность положительных целых чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_k, что $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. Найдите количество разложений n на нечетные слагаемые.

14. *Разбиением* числа N на k частей называется такая невозрастающая последовательность положительных целых чисел $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = N$. Чего больше, разбиений числа N на не более чем k слагаемых, или разбиений числа $N + k$ на ровно k слагаемых?

15. Чего больше, разбиений N на слагаемые, не превосходящие k, или разбиений N на не более чем k слагаемых?

16*. Чего больше, разбиений n на различные слагаемые или на нечетные слагаемые?

17*. Сколькими способами можно разрезать правильный n-угольник на треугольники, проводя диагонали?

18*. Сколько есть таких последовательностей целых чисел a_1, $\ldots$, a_n, что $a_1 = 0$ и $0 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i + 1$ для $1 \leqslant i < n$?

19*. Рассмотрим правильный $2n$-угольник. Сколькими способами можно разбить его вершины на пары так, чтобы отрезки, соединяющие парные вершины, не пересекались?

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 2

1. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные — в порядке убывания?

2. Сколько существует 6-значных чисел, в которых чётных и нечётных цифр поровну?

3. 3 человека должны унести 9 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый готов взять 3 предмета?

4. Сколько имеется 7-значных чисел, у которых каждая следующая (слева направо) цифра не больше предыдущей?

5. Докажите равенство

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant (n+1)/2} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}.$$

6. Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечетных чисел?

7. Рассмотрим клетчатый квадрат размера $n \times n$, проведем в нем диагональ из левого нижнего угла в правый верхний и выкинем все клетки, лежащие выше диагонали. Сколькими различными способами можно разбить оставшуюся фигуру на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?