

1. Докажите тождества

а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

б) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

в) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

2. Докажите, что

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \Delta (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2) \cup \dots \cup (A_n \Delta B_n)$$

для любых множеств A_i, B_i .

3. Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции \cap, \cup, \setminus , неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

4. Докажите полноту системы связок, состоящей из одной связки *итрих Шеффера* $x \mid y = \neg(x \wedge y)$.

5. Является ли полной система связок

а) $\{\wedge, \vee, \setminus\}$, где $x \setminus y$ равна $x \wedge \neg y$?

б) $\{\neg, \equiv\}$, где $x \equiv y$ равна $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$?

6. Назовем функцией большинства $\text{MAJ}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ булеву функцию, значение которой совпадает с тем значением, которое принимает большинство переменных (если мнения разделились поровну, $\text{MAJ} = 0$).

а) Выражается ли MAJ через конъюнкцию и дизъюнкцию?

б) Запишите $\text{MAJ}(x, y, z)$ в виде многочлена Жегалкина.

7. Представьте функцию, заданную многочленом Жегалкина от переменных x_1, \dots, x_n

$$\bigoplus_{|S| \text{ — четно}, S \neq \emptyset} \prod_{j \in S} x_j = x_1 x_2 \oplus \dots \oplus x_{n-1} x_n \oplus x_1 x_2 x_3 x_4 \oplus \dots$$

в виде ДНФ с как можно меньшим количеством конъюнктов.

8. В группе студентов есть один, который знает C++, java, python, huskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два — 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Каково наименьшее количество студентов в такой группе?

9. При изготовлении пирожные — колечки трех сортов: шоколадные, с корицей и с орехами — упаковываются в стандартные коробки по 18 колечек в каждой. Каждая коробка может содержать колечки всех видов. Порядок колечек в коробке не существен.

Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не более 9, колечек с корицей не более 3, а ореховых не более 9?

10*. Набор из 6 цифр (номер) называется счастливым, если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр. Сколько счастливых билетов?