

Занятие 3. Графы. Связность

О терминологии. Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Выражение «подграф A графа B » означает, что граф A можно получить из графа B удалением части вершин и рёбер.

Граф-путь P_n имеет n вершин $v_1, \dots, v_n$. Рёбрами связаны пары вершин v_i и v_{i+1} ($1 \leq n - 1$). Таким образом, в графе-пути $n - 1$ ребро. Говорят, что *длина* пути равна $n - 1$.

1. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.
2. В графе 100 вершин и 800 рёбер.
 - а) Докажите, что в этом графе есть хотя бы одна вершина степени не меньше 16.
 - б) Может ли так случиться, что все степени этого графа имеют степень 16?
3. Вершинами графа, который называется *булев куб размерности n* и обозначается B_n , являются двоичные слова длины n , а соседями являются пары слов, отличающихся в одной позиции.
 - а) Сколько вершин в булевом кубе B_n ?
 - б) Сколько рёбер в булевом кубе B_n ?
 - в) Сколько в булевом кубе B_n подграфов, которые являются графами-путями длины 2 (вершин в таком графе 3)?
4. Про граф известно, что в нём 1000 вершин и 2015 рёбер. Верно ли, что
 - а) в таком графе обязательно есть путь длины 3000?
 - б) в таком графе может найтись простой путь длины 1000?
 - в) в таком графе может не оказаться ни одного простого пути длины 64?
5. *Дополнением $\bar{G}$ графа G* называется такой граф на том же множестве вершин, что и у графа G , в котором пара вершин связана ребром тогда и только тогда, когда в G эта пара вершин ребром не связана.

Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).
6. Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с n вершинами?
7. Вершины графа G_n — двоичные слова длины n . Пара слов связана в графе G_n ребром, если выполняется одно из двух условий:

- слова различаются только в первой позиции;
- слова различаются только в позиции, которая следует за первой единицей.

(Например, при $n = 4$ рёбрами графа G_4 являются пары (0110 и 1110), (0100 и 0110) и, конечно, не только они.)

- а) Какие степени у вершин этого графа? Укажите, сколько вершин каждой степени.
- б) При каких n граф G_n связан?

Домашнее задание 3

О терминологии. Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Выражение «подграф A графа B » означает, что граф A можно получить из графа B удалением части вершин и рёбер.

Граф-путь P_n имеет n вершин $v_1, \dots, v_n$. Рёбрами связаны пары вершин v_i и v_{i+1} ($1 \leq n - 1$). Таким образом, в графе-пути $n - 1$ ребро. Говорят, что *длина* пути равна $n - 1$.

Граф-цикл C_n имеет n вершин $v_1, \dots, v_n$. Рёбрами связаны пары вершин v_i и v_{i+1} ($1 \leq n - 1$) и пара вершин v_n и v_1 . Таким образом, в графе-цикле n рёбер. Говорят, что *длина* цикла равна n .

1. Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?
2. Найдите все графы, в которых каждая пара рёбер имеет общий конец.
3. В графе на 400 вершинах степень каждой вершины равна 201. Докажите, что в этом графе есть подграф, который является графом-циклом длины 3.
4. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?
5. В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).
6. В графе на 100 вершинах, каждая из которых имеет степень 3, есть ровно 600 подграфов, которые являются графами-путями длины 3. Сколько в этом графе подграфов, которые являются графами-циклами длины 3?
7. Вершинами графа $B_{n,r}$ являются двоичные слова длины n , а соседями являются пары слов, отличающихся ровно в r позициях.
Связан ли граф $B_{1000,400}$?