Занятие 3. Комбинаторика и множества

1. Докажите тождества

а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

б) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

в) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

2. Докажите, что

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \cup \dots \cup (A_n \triangle B_n)$$

для любых множеств A_i, B_i.

3. Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции $\cap$, $\cup$, $\setminus$, неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

4. В группе студентов есть один, который знает C++, java, python, huskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два — 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Каково наименьшее количество студентов в такой группе?

5. При изготовлении пирожные — колечки трех сортов: шоколадные, с корицей и с орехами — упаковываются в стандартные коробки по 18 колечек в каждой. Каждая коробка может содержать колечки всех видов. Порядок колечек в коробке не существенен. Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не более 9, колечек с корицей не более 3, а ореховых не более 9?

6. Сколькими способами можно разрезать правильный n-угольник на треугольники, проводя диагонали?

7. Рассмотрим правильный $2n$-угольник. Сколькими способами можно разбить его вершины на пары так, чтобы отрезки, соединяющие парные вершины, не пересекались?

8. *Разложением* числа n называется такая последовательность положительных целых чисел x_1, x_2, $\dots$, x_k, что $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$. Найдите количество разложений n на нечетные слагаемые.

9. *Разбиением* числа N на k частей называется такая невозрастающая последовательность положительных целых чисел $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_k$, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = N$. Чего больше, разбиений числа N на не более чем k слагаемых, или разбиений числа $N + k$ на ровно k слагаемых?

10. Чего больше, разбиений N на слагаемые, не превосходящие k, или разбиений N на не более чем k слагаемых?

11*. Чего больше, разбиений n на различные слагаемые или на нечетные слагаемые?

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 3

1. Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется равенство $(A\setminus B)\cap((A\cup B)\setminus(A\cap B)) = A\setminus B$?

2. Верно ли, что для любых множеств A, B и C выполняется равенство

$$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)?$$

3. Верно ли, что для любых множеств A, B и C выполняется равенство $(A\cap B)\setminus C = (A\setminus C)\cap(B\setminus C)$?

4. Клуб по "Что, где, когда" из 10 человек хочет отправить команду на соревнование. При этом в команде может быть любое число участников от 1 до 9. Чтобы отправить сильнейшую команду клуб хочет провести ряд отборочных игр команда на команду так, чтобы каждое подмножество членов клуба поучаствовало в играх в качестве команды ровно один раз. Докажите, что в таких играх каждая команда обязательно должна играть с командой в точности всех остальных членов клуба.

5. Сколькими способами можно закрасить клетки таблицы 3×4 так, чтобы незакрашенные клетки содержали или верхний ряд, или нижний ряд, или две средних вертикали?

6. Сколькими способами можно раздать 7 различных предметов 4 людям так, чтобы каждому досталось хотя бы по одному предмету?

7. Сколько есть таких последовательностей целых чисел $a_1, \ldots, a_n$, что $a_1 = 0$ и $0 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i + 1$ для $1 \leqslant i < n$?