**1.** Будем говорить, что одна прямоугольная коробка «меньше» другой, если одно из трёх измерений первой коробки меньше одного из трёх измерений второй (если их можно поставить на пол так, чтобы первая коробка была ниже второй). Будет ли это отношение транзитивным?

**2.** Сравните множества:

**а)** $(\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{j\in J} B_j)$ и $\cup_{i\in I, j\in J} (A_i \times B_j)$; **б)** $(\cap_{i\in I} A_i) \times (\cap_{j\in J} B_j)$ и $\cap_{i\in I, j\in J} (A_i \times B_j)$.

**3.** Найдите $R \circ R$, где $R(x, y)$ — бинарное отношение на множестве $\mathbb{R}$, означающее, что

**а)** $y = x + 1$; **б)** $x + y = 1$.

**4.** Является ли композиция отношений эквивалентности отношением эквивалентности?

**5.** Двадцать пять школьников решали несколько задач; каждую задачу решили два школьника и каждый школьник решил две задачи. **а)** Сколько было задач? **б)** Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал хотя бы по одной из решенных им задач.

**6.** Функция $f$ определена на множестве $X$ и принимает значения в множестве $Y$, при этом $B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение $f(f^{-1}(B))$ ? $B$ стало верным?

**7.** Чего больше: инъективных отображений 5-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 5-элементное?

**8.** Пусть $A$ и $B$ — два множества. Покажите равносильность свойств «существует функция $f\colon A \to B$, являющая инъекцией» и «существует функция $f\colon B \to A$, являющаяся сюръекцией».

**9.** Пусть существуют инъекция $f\colon A \to B$ и сюръекция $g\colon A \to B$. Докажите, что тогда существует биекция $h\colon A \to B$.

**10.** Найдите количество **а)** неубывающих инъекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$; **б)** неубывающих сюръекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$.

Функция неубывающая, если $x \leq y$ влечет $f(x) \leq f(y)$.

**11.** Говорят, что $g\colon B \to A$ является *левой обратной* (сооответственно *правой обратной*) к $f$, если $g \circ f = \mathrm{id}_A$ (соответственно $f \circ g = \mathrm{id}_B$).

**а)** Приведите примеры, когда левая обратная не является правой обратной и когда правая обратная не является левой. **б)** Может ли такое случиться для конечных множеств? **в)** Может ли быть так, что у одной функции есть и левая, и правая обратные, но они различны? **г)** Для каких функций существует левая обратная? **д)** Для каких функций существует правая обратная?

**12*. а)** На сфере отмечено 5 точек, никакие три из которых не лежат на большой окружности (большая окружность это окружность, по которой пересекаются сфера и плоскость, проходящая через её центр). Две большие окружности, не проходящие через отмеченные точки, называются эквивалентными, если одну из них с помощью непрерывнвого перемещения по сфере можно перевести в другую так, что в процессе перемещения окружность не проходит через отмеченные точки.

Сколько можно нарисовать окружностей, не проходящих через отмеченные точки и не эквивалентных друг другу?

**б)** Та же задача для $n$ отмеченных точек.

**13*.** Докажите, что всякое отношение $R \subseteq A \times B$ на конечных множествах является композицией $U \circ f_R$ некоторой функции $f_R$, зависящей от $R$, и отношения $U$, которое зависит только от множеств $A$ и $B$.