Дискретная математика **Основной поток**

Занятие 4. Деревья. Раскраски. 2-раскрашиваемые графы.

О терминологии. Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Выражение «подграф A графа B» означает, что граф A можно получить из графа B удалением части вершин и рёбер.

Цикл длины k — это такая последовательность вершин графа $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1$, в которой любые два соседних члена соединены ребром.

Простой цикл — это такой цикл, в котором вершины $a_1, a_2, \ldots, a_k$ различны.

Дерево — связный граф без простых циклов длины больше 2.

Раскраска вершин графа называется правильной, если концы каждого ребра покрашены в разные цвета.

1. Дерево имеет 2015 вершин. Верно ли, что в нём найдется простой путь длины 3?

2. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?

3. Сколько циклов длины 2 может быть в дереве на 12 вершинах? Укажите все возможные ответы.

4. В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т.е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.

5. Имеется связный граф. Докажите, что в нём можно выбрать одну из вершин так, чтобы после её удаления вместе со всеми ведущими из неё рёбрами останется связный граф.

6. а) Докажите, что любое дерево 2-раскрашиваемо (существует правильная раскраска в 2 цвета).

б) Сколько есть правильных 2-раскрасок у дерева?

7. Докажите, что в дереве на $2n$ вершинах можно выбрать n вершин так, что ни одна пара выбранных вершин не соединена ребром (такие множества вершин называются *независимыми*).

8. Граф получен из цикла на $2n$ вершинах добавлением рёбер, соединяющих противоположные вершины.

а) При каких n этот граф 2-раскрашиваемый?

б) При каких n вершины этого графа можно правильно раскрасить в 3 цвета?

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 4

О терминологии. Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Выражение «подграф A графа B» означает, что граф A можно получить из графа B удалением части вершин и рёбер.

Цикл длины k — это такая последовательность вершин графа $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1$, в которой любые два соседних члена соединены ребром.

Простой цикл — это такой цикл, в котором вершины $a_1, a_2, \ldots, a_k$ различны.

Дерево — связный граф без простых циклов длины больше 2.

Раскраска вершин графа называется правильной, если концы каждого ребра покрашены в разные цвета.

1. Степень каждой вершины графа равна 2. Верно ли, что этот граф 2-раскрашиваемый?

2. Сколько существует правильных раскрасок графа–пути длины n (вершин в этом графе $n+1$) в красный, синий и зелёный цвета?

3. В дереве на 2014 вершинах ровно три вершины имеют степень 1. Сколько вершин имеют степень 3?

4. Назовем не 2-раскрашиваемый граф минимальным, если после удаления любого ребра он становится 2-раскрашиваемым. Докажите, что в минимальном не 2-раскрашиваемом графе на 1000 вершинах есть хотя бы одна изолированная вершина (т.е. вершина степени 0).

5. Простой путь наибольшей длины в дереве назовем *диаметром.* Вершинами *полного бинарного дерева ранга* n являются двоичные слова длины не больше n (включая *пустое слово* длины 0). Два слова соединены ребром в полном бинарном дереве, если одно получается из другого приписыванием одной цифры (нуля или единицы). Найдите количество диаметров в полном бинарном дереве ранга n.

6. Есть два дерева на n вершинах, каждое имеет диаметр длины d. Можно ли так добавить ребро между вершинами этих деревьев, чтобы длина диаметра полученного дерева равнялась d?

7. Есть ли в булевом кубе остовное дерево, в котором все вершины кроме двух имеют степень 2?