

Занятие 4. Множества и логика

1. Найдите значение следующей булевой функции при всех значениях переменных:

$$\bigoplus_{S \neq \emptyset} \prod_{i \in S} x_i = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus \dots$$

2. Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции \cap , \cup , \setminus , неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

3. Докажите полноту системы связок, состоящей из одной связки *штрих Шеффера* $x \mid y = \neg(x \wedge y)$.

4. Является ли полной система связок

а) $\{\wedge, \vee, \setminus\}$, где $x \setminus y$ равна $x \wedge \neg y$?

б) $\{\neg, \equiv\}$, где $x \equiv y$ равна $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$?

5. Назовем функцией голосования $\text{MAJ}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ булеву функцию, значение которой совпадает с тем значением, которое принимает большинство переменных (если нулей и единиц среди переменных поровну, то $\text{MAJ} = 0$).

а) Выражается ли MAJ через конъюнкцию и дизъюнкцию?

б) Запишите $\text{MAJ}(x, y, z)$ в виде многочлена Жегалкина.

6. КНФ (конъюнктивной нормальной формой) называется конъюнкция дизъюнкций переменных или их отрицаний. Докажите, что любое высказывание можно выразить в виде КНФ.

7. Представьте функцию, заданную многочленом Жегалкина от переменных x_1, \dots, x_n

$$\bigoplus_{|S| \text{ — чётно}, S \neq \emptyset} \prod_{j \in S} x_j = x_1 x_2 \oplus \dots \oplus x_{n-1} x_n \oplus x_1 x_2 x_3 x_4 \oplus \dots$$

в виде ДНФ с как можно меньшим количеством конъюнктов.

8. Размером ДНФ будем называть число вхождений переменных в нее. Каков минимальный размер ДНФ, задающей функцию $\text{MAJ}(x_1, \dots, x_n)$?

9. Сколькими способами можно раздать 7 различных предметов 4 людям так, чтобы ничего не досталось нечетному числу людей?

Домашнее задание 4

1. Докажите или опровергните следующее утверждение:

$$A \triangle B \triangle C \subseteq A \cup B \Leftrightarrow C \subseteq A \cup B.$$

2. Найдите значение следующей булевой функции при всех значениях переменных:

$$\bigoplus_{S, |S| \geq 1} \prod_{i \in S} x_i = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus \dots \oplus x_{n-1} x_n \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus \dots$$

3. Сколькими способами можно переставить числа 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы число 1 не стояло первым или третьим, а число 2 не стояло последним?

4. Докажите, что представление булевой функции в виде стандартного многочлена Жегалкина единственно. (В стандартный многочлен Жегалкина все переменные входят в степени не выше 1.)

5. Является ли полной система связок $\{\vee; \rightarrow\}$?

6. Является ли полной система связок $\{\neg, \text{MAJ}(x_1, x_2, x_3)\}$? Здесь $\text{MAJ}(x_1, x_2, x_3)$ — булева функция, значение которой совпадает с тем значением, которое принимает большинство переменных.

7. Размером ДНФ будем называть число вхождений переменных в нее. Каков минимальный размер ДНФ, задающей функцию $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$?