

Занятие 5. Ориентированные графы.

О терминологии. Цикл длины k — это такая последовательность вершин графа (ориентированного или неориентированного) $a_1, a_2, \dots, a_k, a_1$, в которой любые два соседних члена (a_i, a_{i+1}) соединены ребром (в случае ориентированного графа важен порядок).

Простой цикл — это такой цикл, в котором вершины a_1, a_2, \dots, a_k различны.

Ациклический граф — это ориентированный граф без простых циклов длины больше 1.

1. Вершины ориентированного графа — целые числа от 0 до 9. Ребро идет из вершины x в вершину y если $y - x = 3$ или $x - y = 5$. Найдите количество компонент сильной связности в этом графе.
2. Найдите наибольшее целое положительное число, в котором все цифры разные, а любые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, делящееся на 7.
3. 50 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Говорят, что команда A сильнее B , если A выиграла у B или есть команда C , такая, что A выиграла у C , а C выиграла у B . Доказать, что команда, набравшая наибольшее число очков, сильнее любой другой.
4. Известно, что в ориентированном графе на ≥ 2 вершинах из любой вершины в любую другую идёт ровно один простой путь. Верно ли, что выходные (они же исходящие) степени вершин в этом графе равны 1?
5. Найдите максимальное количество простых путей с заданными концами в ориентированном ациклическом графе на n вершинах.
6. а) Докажите, что есть такое двоичное слово, в котором любая комбинация из 10 нулей и единиц встречается ровно один раз.
б) Пусть двоичное слово удовлетворяет условию предыдущего пункта и начинается на 0100011101. Найдите последние 8 цифр этого слова.
7. Предположим, что последовательность чисел задана соотношением $a_{n+1} = f(a_n)$, где f — некоторая функция (определённая на всех числах).
а) Покажите, что либо все члены последовательности различны, либо она периодична: после некоторого начала (предпериода) числа начинают повторяться (период).
б) Покажите, что второй случай имеет место тогда и только тогда, когда $a_{2n} = a_n$ при некотором n .

Домашнее задание 5

Цикл длины k — это такая последовательность вершин графа (ориентированного или неориентированного) $a_1, a_2, \dots, a_k, a_1$, в которой любые два соседних члена (a_i, a_{i+1}) соединены ребром (в случае ориентированного графа важен порядок).

Простой цикл — это такой цикл, в котором вершины a_1, a_2, \dots, a_k различны.

Ациклический граф — это ориентированный граф без простых циклов длины больше 1.

1. Последовательность чисел определена рекуррентно: $a_0 = 5$; $a_{n+1} = a_n^2 + 3$. Найдите последнюю цифру числа a_{2015} .
2. Известно, что в неориентированном графе существует путь, проходящий по каждому ребру ровно два раза. Верно ли, что в графе есть эйлеров цикл?
3. Выходная (она же исходящая) степень каждой вершины в ориентированном графе на n вершинах равна $n - 2$. Какое количество компонент сильной связности может быть в этом графе? Укажите все возможные значения.
4. Пусть в ориентированном графе для любой пары вершин u, v есть либо ребро (u, v) , либо ребро (v, u) (ровно одно из двух). Докажите, что в таком графе есть простой путь, включающий в себя все вершины.
5. Можно ли заполнить таблицу из 64 строк и 6 столбцов нулями и единицами так, чтобы выполнялись условия: (а) в строках таблицы записаны все двоичные слова длины 6; (б) ни одну строку в таблице нельзя получить из какой-нибудь вышестоящей строки заменами единиц на нули; (в) 57-я строка содержит двоичное слово 011100?
6. Куб со стороной $n \geq 3$ разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?